Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et dresser son tableau de variation, en précisant les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2. Étudier la convergence des intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$.

Soit F la fonction définie par : $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x^2} f(t)dt$.

3. Justifier que le domaine de définition D de la fonction F est $]-\infty\,;\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

4. Préciser les limites de F aux bornes de D.

5. Justifier que F est dérivable sur $]-\infty\,;\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$, et que :

$$\forall x \in\,]-\infty\,;\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[,\ \mathrm{F}'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}.$$

6. Dresser le tableau de variations de F.

Indication : on pourra montrer que $\mathrm{F}'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^6 + 4x^3 - 1 < 0 \end{cases}$.

7. Tracer l'allure du graphe de F et préciser son intersection avec l'axe $(\mathrm{O}x)$.

Exercice 2.

1. **a)** Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

Indication : On commencera par poser $u = t^2$, puis par faire une intégration par parties faisant apparaître une intégrale de la fonction $u \mapsto \dfrac{\cos u}{u^{3/2}}$.

b) Est-il nécessaire que f, continue sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$, admette une limite nulle en $+\infty$ pour que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f$ existe ?

2. En vous inspirant de l'exemple précédent, montrer en l'illustrant sur un exemple qu'il n'est pas nécessaire que f soit bornée pour que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f$ existe.