

EXERCICE 1.

1. $1 + t^3 > 0 \Leftrightarrow t > -1$, d'où $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $\forall t \in]-1; +\infty[$, $f'(t) = \frac{-3t^2}{2(1+t^3)^{3/2}} < 0$.

f est strictement décroissante sur son domaine de définition $]-1; +\infty[$, avec $\lim_{t \rightarrow -1} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

2. • **Version simple pour I** - $\forall t \in]-1; 0]$, $t \leq t^3$ donc $\sqrt{1+t} \leq \sqrt{1+t^3}$ et $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente...

• **I par équivalence : le changement de variable n'est pas nécessaire !**
- Pour $t = x - 1$ (donc $x = t + 1$, et x tend vers 0 lorsque t tend vers -1),

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^3-3x^2+3x-1}},$$

or $\frac{1}{\sqrt{3x-3x^2+x^3}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3x}}$, donc $f(t) \underset{t \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+t}}$.

Comme f et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+t}}$ sont continues et positives sur $]-1; 1]$, en appliquant le critère des équivalences, I est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{(t - (-1))^{1/2}} dt$, donc convergente (car $\alpha = 1/2 < 1$).

• **J** - f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$. $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ étant aussi continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, par la règle des équivalents, J est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$, intégrale de Riemann convergente (car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).

Les intégrales I et J convergent.

3. $F(x)$ est défini si $[1/x; x^2]$ ou $[x^2; 1/x]$ est dans $]-1; +\infty[$.

- Si $x < -1$, $\frac{1}{x} > -1$ et $x^2 > 0$ donc $F(x)$ est défini.
- Si $-1 \leq x < 0$, $\frac{1}{x} \leq -1$ et $x^2 > 0$ donc $F(x)$ n'est pas défini.
- Si $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $F(x)$ est défini.

Le domaine de définition D de la fonction F est $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = J$, $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = I$, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = -J$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = J$.

5. Soit G une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$. Alors : $\forall x \in D$, $F(x) = G(x^2) - G(1/x)$.
 $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1/x$ sont dérivables sur D à valeurs dans $\mathcal{D}_f$ et G est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, F est dérivable sur D par composition, avec $\forall x \in D$,

$$F'(x) = 2xf'(x^2) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}.$$

$$f \text{ est dérivable sur } D \text{ avec } \forall x \in D, F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}.$$

6. • **Manifestement**, $F'(x) > 0$ pour $x > 0$.
• Supposons $x < -1$. $F'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} < \frac{-1}{\sqrt{x+x^4}} \Leftrightarrow 2x\sqrt{x+x^4} < -\sqrt{1+x^6} \Leftrightarrow -2x\sqrt{x+x^4} > \sqrt{1+x^6}$.

Ici, tout est positif. Élevons au carré : $F'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+x^4) > 1+x^6 \Leftrightarrow 3x^6+4x^3-1 > 0$. En posant $X = x^3$, il reste à étudier le trinôme du second degré

$3X^2+4X-1$. Ses racines sont $\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Seule $a = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ est inférieure à -1 .

$3X^2+4X-1$ est donc positif pour $X \leq a$ et négatif pour $X \geq a$. D'où, avec

$$b = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}},$$

F est strictement décroissante sur $]-\infty; b]$, strictement croissante sur $[b; -1[$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

7. f étant strictement positive, $F(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 1$ (puisque $-1 \notin D$).

L'unique intersection de la courbe de F avec l'axe (Ox) est en (1;0).

EXERCICE 2.

1. a) Le changement de variable $u = t^2$ conduit à l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$, qui en intégrant par parties est de même nature que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$, elle-même absolument

convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$.

- b) $f : t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[\sqrt{\pi}; +\infty[$, n'admet aucune limite en $+\infty$ et pourtant $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe...

2. En raisonnant comme en 1) avec $f : t \mapsto \sqrt{t} \sin(t^2)$, $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe.

Pourtant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = +\infty$ et

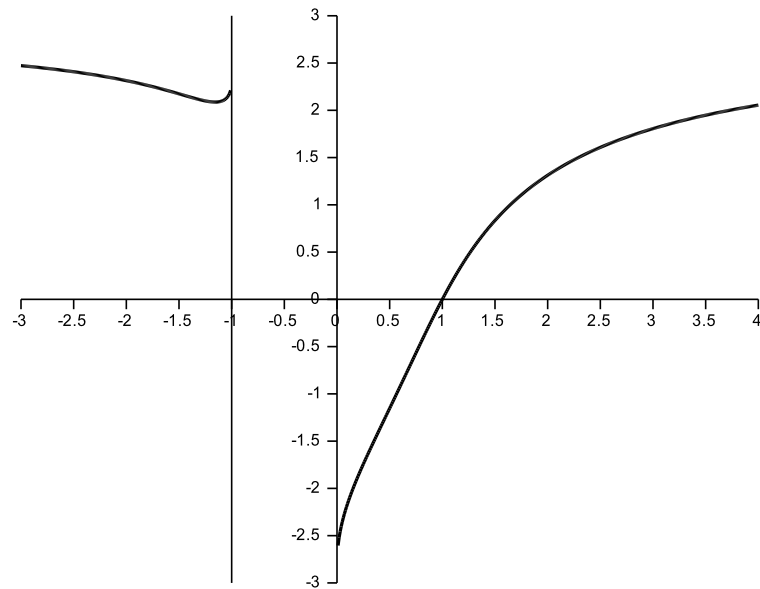
$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = -\infty$, f n'est ni majorée ni minorée ...

COURBE DE F DE L'EXERCICE 1

```

function y=F(x)
    y=integrate('1/sqrt(1+t^3)', 't', 1/x, x^2)
endfunction
x=-3:0.01:-1.01;
y=x;
for k=1:length(x)
    y(k)=F(x(k));
end
plot2d(x,y)
x=0.01:0.01:4.;
y=x;
for k=1:length(x)
    y(k)=F(x(k));
end
plot2d(x,y)
plot2d([-1 -1], [-3 3])

```

COURBE DE $x \mapsto \sin(x^2)$ DE L'EXERCICE 2

```

x=0:0.002:20;
plot2d(x,sin(x^2))

```

