Exemple de diagonalisation par blocs

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de E de matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{A} = mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $u_1 = f(e_1)$ et $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}(e_1, u_1)$.
Montrer F_1 est un sous-espace stable par f.

2. Soit $u_2 = f(e_2)$ et $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}(e_2, u_2)$.
Montrer F_2 est un sous-espace stable par f.

3. a) Soit $\mathcal{C} = (e_1, u_1, e_2, u_2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.

b) Que peut-on en déduire pour les sous-espaces F_1 et F_2 ?

4. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

5. a) À l'aide de la formule de changement de base, déterminer la matrice M représentant f dans la base $\mathcal{C}$.

b) Retrouver M en exprimant directement les images par f des vecteurs de $\mathcal{C}$.
On dit que *« la matrice M est diagonale par blocs »* car il existe deux matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, appelées « blocs », telles que :

$$\mathrm{M} = mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B}_2 \end{array}\right)$$

6. a) Calculer M^2.

b) En déduire $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n $fois$) en fonction de n.

7. On note f_1 et f_2 les restrictions de f à F_1 et F_2 :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathrm{F}_1 & \to & \mathrm{F}_1 \\ u & \mapsto & f(u) \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathrm{F}_2 & \to & \mathrm{F}_2 \\ u & \mapsto & f(u) \end{array}.$$

a) Justifier que f_1 et f_2 sont des **endo**morphismes de F_1 et F_2 respectivement.

b) Préciser $mat_{(e_1,u_1)}(f_1)$ et $mat_{(e_2,u_2)}(f_2)$.

8. Soit u un vecteur non nul de F_1.

a) Existe-t-il un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$?

b) Existe-t-il une base de F_1 dans laquelle la matrice de f_1 est diagonale ?

9. Effectuer la même étude pour f_2.