EXEMPLE DE DIAGONALISATION PAR BLOCS

1. Remarquons que $f(u_1) = -e_1$.
Soit $u \in F_1$: il existe a et b réels tels que $u = ae_1 + bu_1$.
Alors $f(u) \stackrel{\text{lin.}}{=} af(e_1) + bf(u_1) = au_1 - be_1 \in F_1$.
Donc F_1 est un sous-espace stable par f .
2. Pour F_2 , c'est exactement la même histoire.
Remarquons que $f(u_2) = -e_2$.
Soit $u \in F_2$: il existe a et b réels tels que $u = ae_2 + bu_2$.
Alors $f(u) \stackrel{\text{lin.}}{=} af(e_2) + bf(u_2) = au_2 - be_2 \in F_2$.
Donc F_2 est un sous-espace stable par f .

3. a) La matrice $mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ exprimant $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ est

$$P = mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En calculant le rang de P par la méthode du pivot, on obtient $rg(P) = 4$.
Comme $\dim(E) = 4$, cela signifie que $\mathcal{C}$ est une base de E .

- b) En concaténant la base (e_1, u_1) de F_1 et la base (e_2, u_2) de F_2 , on obtient une base de E . Cela signifie que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
4. P est la matrice précédente : $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.
La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1} .

$$P^{-1} = mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. a) Par le théorème de changement de base :

$$M = mat_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Comme on l'a vu, $f(e_1) = u_1$, $f(u_1) = -e_1$, $f(e_2) = u_2$ et $f(u_2) = -e_2$, ce qui permet de retrouver (rapidement) la matrice M .
6. a) $M^2 = -I_4$.

- b) Rappelons que $mat_{\mathcal{C}}(f^n) = (mat_{\mathcal{C}}(f))^n = M^n$.
On a : $M^3 = -M$ et $M^4 = I_4$. Par conséquent
 $M^{4k} = (M^4)^k = I_4$, $M^{4k+1} = (M^4)^k M = M$, $M^{4k+2} = (M^4)^k M^2 = -I_4$,
 $M^{4k+3} = (M^4)^k M^3 = -M$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{4k} = Id, f^{4k+1} = f, f^{4k+2} = -Id, f^{4k+3} = -f.$$

7. a) f_1 et f_2 sont des endomorphismes de F_1 et F_2 respectivement car F_1 et F_2 sont stables par f .

$$b) \quad mat_{(e_1, u_1)}(f_1) = mat_{(e_2, u_2)}(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Soit u un vecteur non nul de F_1 , écrivons $u = ae_1 + bu_1$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
a) $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow au_1 - be_1 = \lambda ae_1 + \lambda bu_1 \Leftrightarrow (\lambda a + b = 0 \text{ et } \lambda b - a = 0)$ car (e_1, u_1) est une base de F_1 .
Ceci entraîne $(\lambda^2 + 1)b = 0$, donc $b = 0$, donc $a = 0$, ce qui est impossible car $u \neq 0$.
b) Supposons qu'il existe une base (w, t) de F_1 dans laquelle la matrice de f_1 soit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a alors $f(w) = \lambda w$, ce qui est impossible puisque $w \neq 0$ (comme tout vecteur d'une famille libre).
9. Il se passe exactement la même chose pour f_2 .

ERREURS FRÉQUENTES

1. Par définition, $\text{Vect}(e - 1, u_1)$ est un sous-espace vectoriel de E .
 $\text{Vect}(e_1, u_1)$ signifie « le sous-espace vectoriel engendré par e_1 et u_1 ».
Pour calculer $f(u_1)$, il suffit de calculer le produit $mat_{\text{cursB}}(f)mat_{\text{cursB}}(u_1) =$
 $A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = mat_{\mathcal{B}}(-e_1)$.
- 3.a) $card(\mathcal{C}) = 4$ et non $\dim(\mathcal{C})$.
- 3.b) $\mathcal{C} = F_1 + F_2$ et $\mathcal{C} = (F_1, F_2)$ n'ont pas de sens.
- 6.b) Question mal comprise : par définition, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).
- 8.a) $f(u) = \lambda u$ ne provient pas de la stabilité de F_1 . Par exemple, on a $f(e_1) = u_1 = (-1, 2, 1, 1) \neq \lambda e_1$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$)