1. a) $N_1 = X_{1,1}$ suit la loi de X : $\mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(X) = \mu$.
- b) Sachant $[N_{n-1} = k]$, N_n est la somme des k variables $X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$ toutes d'espérance μ . Par linéarité : $N_{n-1}(\Omega)$, $\mathbb{E}(N_n | [N_{n-1} = k]) = k\mu$.
- c) Appliquons la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $([N_{n-1} = k])_{k \in \mathbb{N}_{n-1}(\Omega)}$ donne
- $$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}_{n-1}(\Omega)} \mathbb{P}(N_{n-1} = k) \mathbb{E}(N_n | [N_{n-1} = k])$$
- $$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}_{n-1}(\Omega)} \mathbb{P}(N_{n-1} = k) k\mu = \mu \mathbb{E}(N_{n-1}).$$
- La suite $(\mathbb{E}(N_n))_{n \geq 1}$ est géométrique de raison μ et de premier terme μ , d'où
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(N_n) = \mu^n.$$
- d) Notons que par définition $\mu \geq 0$. Il y a
- régime d'extinction si $\mu < 1$;
 - régime critique si $\mu = 1$ (et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(N) = 1$);
 - régime de prolifération si $\mu > 1$.
- 2.
- $M = 1 \Rightarrow \mu = 1/2$: régime d'extinction ;
 - $M = 2 \Rightarrow \mu = 1$: régime critique ;
 - $M = 3 \Rightarrow \mu = 3/2$: régime de prolifération.
3. On suppose que le nombre de particules engendrées par une particule suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2; p)$ (où $p \in]0; 1[$). Déterminer le type de régime suivant la valeur de p .
- $p < 1/2 \Rightarrow \mu = 2p < 1$: régime d'extinction ;
 - $p = 1/2 \Rightarrow \mu = 1$: régime critique ;
 - $p > 1/2 \Rightarrow \mu > 1$: régime de prolifération.
4. Notons Y le nombre d'enfants par homme et X le nombre de garçons.
- Supposons que $Y = k$. Notons, pour tout i de $[1; k]$, Y_i la variable indicatrice de l'événement « le $i^{\text{ème}}$ enfant est un garçon ». Par l'énoncé, chaque Y_i suit $\mathcal{B}(1/2)$.
- Alors $X = \sum_{i=1}^Y Y_i$, donc par linéarité $\mathbb{E}(X | [Y = k]) = k/2$.
- Avec la système complet d'événements $([Y = k])_{k \in \mathbb{Y}(\Omega)}$,
- $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbb{P}(Y = k) \times (k/2) = \mathbb{E}(Y)/2 = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$
- Conclusion
- $\mathcal{E} < 2 \Rightarrow \mu < 1$: régime d'extinction ;
 - $\mathcal{E} = 2 \Rightarrow \mu = 1$: régime critique ;
 - $\mathcal{E} > 2 \Rightarrow \mu > 1$: régime de prolifération.

5. Une majoration pour le cas sous-critique $\mu < 1$.
- a) $\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n(\Omega)} k \mathbb{P}(N_n = k) \geq \sum_{k \in \mathbb{N}_n(\Omega), k \neq 0} \mathbb{P}(N_n = k) = \mathbb{P}(N_n \geq 1)$.
- b) $1 \geq \mathbb{P}(N_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_n \geq 1) \geq 1 - \mathbb{E}(N_n)$.
Comme $\mathbb{E}(N_n) = \mu^n$ et $0 \leq \mu < 1$, $1 - \mathbb{E}(N_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
Donc par encadrement : $\mathbb{P}(N_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
Après un grand nombre de génération, il devient quasiment certain qu'il y ait extinction de la particule.
- c) On cherche n tel que $\mathbb{P}(N_n = 0) \geq 1/2$. Il suffit pour cela que $1 - \mu^n \geq 1/2$.
 $1 - \mu^n \geq 1/2 \Leftrightarrow \mu^n \leq 1/2 \Leftrightarrow n \ln(\mu) \leq -\ln(2) \Leftrightarrow n \geq -\ln(2)/\ln(\mu)$, avec renversement de l'inégalité car $\mu < 1$ entraîne $\ln \mu < 0$ ($\mu = 1, 8/2 = 0,9$).
Finalement, $n \geq 7$ convient et au bout de sept générations peut-on assurer que la probabilité de disparition du patronyme est supérieure.
6. Explication du terme « critique ».
- a) Le régime est critique donc $\mu = 1$.
- Si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, alors $\mu = \mathbb{E}(X) = 0$, ce qui est exclu.
 - Si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ alors
- $$\mu = \sum_{k=1}^M k \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X \geq 2).$$
- Or $\mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X \geq 2) = (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X \geq 2)) + \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 + \mathbb{P}(X \geq 2)$.
D'où $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \mu - 1$, $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 0$ donc $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0$.
Ainsi : $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \geq 2) = 0$, donc $\mathbb{P}(X = 1) = 1$: X est constante égale à 1.
Finalement :
- soit X est constante égale à 1 et la situation n'a plus rien d'aléatoire ;
 - soit $\mathbb{P}(X = 0) \in]0; 1[$.
- b) $p \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(X = 0) \in]0; 1[$.
- $\mathbb{P}(N_1 = 0) = \mathbb{P}(X_{1,1} = 0) = p$.
 - Comme $[N_n = 0] \subset [N_{n+1} = 0]$, $\mathbb{P}(N_n = 0) \leq \mathbb{P}(N_{n+1} = 0)$ et la suite $(\mathbb{P}(N_n = 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et minorée par p .
- c) Bien que l'espérance de N_n ne soit jamais nul, à tout moment la probabilité d'extinction est strictement positive, minorée par p . On ne peut dès lors pas exclure une extinction.