EXERCICE 1. Une fonction définie par une intégrale

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
b) En déduire les variations de F .
- Déterminer la limite de F en 0 (à droite).
- Justifier que, pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq e^{-x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
- Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ existe et calculer cette intégrale.

EXERCICE 2. Le paradoxe de Parrondo

Dans cet exercice, on étudie un paradoxe soulevé par le physicien espagnol Juan PARRONDO en 1996⁽¹⁾ que l'on peut résumer ainsi :

En associant deux jeux défavorables, on peut obtenir un jeu favorable.

Disposant d'un jeton bicolore (une face rouge, une face verte) et d'une pièce de monnaie non truquée, on propose deux jeux en respectant le protocole suivant :

① On lance une fois pour toutes le jeton, dont la face initialement visible sera équiprobablement la rouge ou la verte.

② JEU A :

☞ On lance la pièce ;

☞ Si la face visible du jeton est rouge, on gagne 6 euros si la pièce a amené pile, on perd 2 euros **et on retourne le jeton** si la pièce a amené face ;

☞ Si la face visible du jeton est verte, on gagne 2 euros si la pièce a amené pile, on perd 4 euros si la pièce a amené face.

③ JEU B :

☞ On lance la pièce ;

☞ Si la face visible du jeton est verte, on gagne 6 euros si la pièce a amené pile, on perd 2 euros **et on retourne le jeton** si la pièce a amené face ;

☞ Si la face visible du jeton est rouge, on gagne 2 euros si la pièce a amené pile, on perd 4 euros si la pièce a amené face.

On notera que, pour chacun des deux jeux, on ne retourne le jeton que dans un cas sur quatre.

(1). Je m'inspire ici d'un article de Jean-Paul DELAHAYE, parue dans la revue *Pour la science* en août 2012.

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I. Étude du jeu A (respectivement du jeu B).

Dans cette partie, après avoir lancé le jeton, on répète indéfiniment le jeu A.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « la face visible du jeton est rouge avant le $n^{\text{ème}}$ jeu A », et on note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu lors du $n^{\text{ème}}$ jeu A.

- Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{2^n}$.
- Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n | R_n)$ puis $\mathbb{E}(X_n)$.
- Après avoir justifié son existence, déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathbb{E}(X_n) \simeq -1\text{€}$ à moins d'un centime près.
- Justifier, sans calcul supplémentaire, qu'il en est de même si, au lieu de répéter le jeu A, on répète indéfiniment le jeu B.

On retiendra que la répétition de jeux A est défavorable, et qu'à partir de la septième partie, on peut « espérer » perdre un euro à chaque partie. Il en est de même pour le jeu B.

PARTIE II. Étude de la combinaison « jeu A puis jeu B ».

Dans cette partie, après avoir lancé le jeton, on répète indéfiniment la succession « jeu A puis jeu B ». On effectue donc jeu A, puis jeu B, puis jeu A, puis jeu B, puis jeu A, etc.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note S_n (respectivement T_n) l'événement « la face visible du jeton est rouge avant le $n^{\text{ème}}$ jeu A », (respectivement l'événement « la face visible du jeton est rouge avant le $n^{\text{ème}}$ jeu B »), et on note Y_n (respectivement Z_n) la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu lors de la $n^{\text{ème}}$ partie de jeu A (respectivement v.a.r. égale au gain algébrique obtenu lors de la $n^{\text{ème}}$ partie de jeu B).

- a) Justifier que $(\mathbb{P}(S_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique, puis que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(S_n) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n}.$$

- b) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n | S_n)$ puis $\mathbb{E}(Y_n)$.
- c) Après avoir justifié son existence, déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathbb{E}(Y_n) \simeq +1\text{€}$ à moins d'un centime près.
- a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_n)$.
- b) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n | T_n)$ puis $\mathbb{E}(Z_n)$.
- c) Après avoir justifié son existence, déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathbb{E}(Z_n) \simeq +1\text{€}$ à moins d'un centime près.

PARTIE III. Paradoxe de Parrondo.

En quoi les résultats des parties précédentes peuvent-ils paraître paradoxaux ?