Exercice 1. *Une fonction définie par une intégrale*

1. Soit $x>0$. $t \to \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$; de plus, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t}=o(t^{-2})$. L'existence de $F(x)$ résulte alors de la règle de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives.

2. Pour tout $x>0$, on écrit : $F(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_1^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt=F(1)-g(x)$ où g est la primitive nulle en 1 de la fonction $f : t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$, elle-même continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x>0$: $F'(x)=-g(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}<0$, donc F est strictement décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

3. Pour $x\in\,]0,1]$: $F(x)=\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\geqslant\int_x^1\frac{e^{-1}}{t}\,dt\geqslant -e^{-1}\ln x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}F(x)=+\infty$.

4. Pour $x\geqslant1$: $0\leqslant F(x)\leqslant\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}\,dt=e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

5. ⋆ Pour tout $x>0$: $0\leqslant xF(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{x.e^{-t}}{t}\,dt\leqslant\int_x^{+\infty}e^{-t}\,dt=e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xF(x)=0$.

⋆ Pour tout $x\in\,]0,1]$: $0\leqslant xF(x)\leqslant x\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt+xF(1)\leqslant x\int_x^1\frac{dt}{t}+xF(1)=xF(1)-x\ln x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0}xF(x)=0$.

6. Soit $0<\varepsilon<M$. Alors en effectuant une intégration par parties, on a : $\displaystyle\int_\varepsilon^M F(x)\,dx=\Big[xF(x)\Big]_\varepsilon^M+\int_\varepsilon^M e^{-x}dx$. D'où : $\displaystyle\int_\varepsilon^M F(x)\,dx=M.F(M)-\varepsilon.F(\varepsilon)-e^{-M}+e^{-\varepsilon}$, qui tend vers 1 quand $M\to+\infty$ et $\varepsilon\to0$. D'où l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}F(x)\,dx$, avec : $\displaystyle\int_0^{+\infty}F(x)\,dx=1$.

Exercice 2. *Le paradoxe de Parrondo*

Partie I. *Étude du jeu A (respectivement du jeu B).*

1. $\mathbb{P}(R_1)=1/2$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la FPT avec le SCE $(R_n,\overline{R_n})$ donne
$\mathbb{P}(R_{n+1})=\mathbb{P}(R_n)\mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1})+\mathbb{P}(\overline{R_n})\mathbb{P}_{\overline{R_n}}(R_{n+1})=\mathbb{P}(R_n)\times\dfrac12+(1-\mathbb{P}(R_n))\times0=\dfrac12\mathbb{P}(R_n)$.
Donc $\big(\mathbb{P}(R_n)\big)$ est une suite géométrique : $\forall n\geqslant1, \mathbb{P}(R_n)=1/2^n$.

2. Sachant R_n, X_n prend équiprobablement les valeurs 6 ou -2 d'où $\mathbb{E}(X_n|R_n)=(6-2)/2=2$, et de même $\mathbb{E}(X_n|\overline{R_n})=(2-4)/2=-1$.
Par la FET avec le SCE $(R_n,\overline{R_n})$, $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{2^n}\times2+\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)(-1)=-1+\dfrac{3}{2^n}$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=-1$, il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,\quad -1,01<\mathbb{E}(X_n)<-0,99$.
Dès que $\dfrac{3}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{100}$, $\mathbb{E}(X_n)=-1$€ à moins de 1 centime.
$\dfrac{3}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{100}\Leftrightarrow 2^n\geqslant300\Leftrightarrow n\geqslant9$ ($2^8=256$ et $2^9=512$).

4. Les règle de B étant analogues à celles de A, seule la couleur du jeton étant permutée, la situation pour B est identique, puisque la couleur initiale du jeton est équiprobable.

Partie II. *Étude de la combinaison « jeu A puis jeu B ».*

1. **a)** $\mathbb{P}(S_1)=1/2$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la FPT avec le SCE $(S_n,\overline{S_n})$ donne
$\mathbb{P}(S_{n+1})=\mathbb{P}(S_n)\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1})+\mathbb{P}(\overline{S_n})\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$. Reste à calculer ces probabilités conditionnelles.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1})&\overset{\text{FPT}}{=}\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1}\cap T_n)+\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1}\cap\overline{T_n})\\&\overset{\text{FPC}}{=}\mathbb{P}_{S_n}(T_n)\mathbb{P}_{S_n\cap T_n}(S_{n+1})+\mathbb{P}_{S_n}(\overline{T_n})\mathbb{P}_{S_n\cap\overline{T_n}}(S_{n+1})\\&=\frac12\times1+\frac12\times\frac12=\frac34,\text{ et de même}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1})&\overset{\text{FPT}}{=}\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1}\cap T_n)+\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1}\cap\overline{T_n})\\&\overset{\text{FPC}}{=}\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(T_n)\mathbb{P}_{\overline{S_n}\cap T_n}(S_{n+1})+\mathbb{P}_{\overline{S_n}}(\overline{T_n})\mathbb{P}_{\overline{S_n}\cap\overline{T_n}}(S_{n+1})\\&=0\times\cdots+1\times\frac12=\frac12.\text{ Du coup}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(S_{n+1})=\dfrac34\mathbb{P}(S_n)+\dfrac12(1-\mathbb{P}(S_n))=\dfrac14\mathbb{P}(S_n)+\dfrac12$. $(\mathbb{P}(S_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $\dfrac23$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_n)=\dfrac{1}{4^{n-1}}\left(\dfrac12-\dfrac23\right)+\dfrac23=\dfrac23-\dfrac23\times\dfrac{1}{4^n}$.

b) $\mathbb{E}(Y_n|S_n)=\mathbb{E}(X_n|R_n)=2$,
$\mathbb{E}(Y_n|\overline{S_n})=\mathbb{E}(X_n|\overline{R_n})=-1$ puis $\mathbb{E}(Y_n)\overset{\text{FET}}{=}2\mathbb{P}(S_n)-(1-\mathbb{P}(S_n))=3\mathbb{P}(S_n)-1=1-\dfrac{2}{4^n}$.

c) Et $\mathbb{E}(Y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $0,99<\mathbb{E}(Y_n)<1,01$.
Dès que $\dfrac{2}{4^n}\leqslant\dfrac{1}{100}$, $\mathbb{E}(X_n)=1$€ à moins de 1 centime.
$\dfrac{2}{4^n}\leqslant\dfrac{1}{100}\Leftrightarrow4^n\geqslant200\Leftrightarrow n\geqslant4$.

2. **a)** En procédant comme dans la question précédente :
$\mathbb{P}(T_1)\overset{\text{FPT}}{=}\dfrac12\times\dfrac12+\dfrac12\times0=\dfrac14$, puis $\mathbb{P}(T_{n+1})=\mathbb{P}(T_n)\times\dfrac12+\mathbb{P}(\overline{T_n})\dfrac14=\dfrac14\mathbb{P}(T_n)+\dfrac14$, (T_n) suite arithmético-géométrique de point fixe $\dfrac13$, qui conduit à $\mathbb{P}(T_n)=\dfrac13\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$.

b) $\mathbb{E}(Z_n|T_n)=\dfrac12\times2+\dfrac12(-4)=-1$ et $\mathbb{E}(Z_n|\overline{T_n})=\dfrac12\times6+\dfrac12(-2)=2$,
puis $\mathbb{E}(Z_n)\overset{\text{FET}}{=}\mathbb{P}(T_n)\times(-1)+(1-\mathbb{P}(T_n))\times2=2-3\mathbb{P}(T_n)=1+\dfrac{1}{4^n}$.

c) Et $\mathbb{E}(Z_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $0,99<\mathbb{E}(Z_n)<1,01$.
Dès que $\dfrac{1}{4^n}\leqslant\dfrac{1}{100}$, $\mathbb{E}(X_n)=1$€ à moins de 1 centime.
$\dfrac{1}{4^n}\leqslant\dfrac{1}{100}\Leftrightarrow4^n\geqslant100\Leftrightarrow n\geqslant4$.

Partie III. *Paradoxe de Parrondo.*

Paradoxalement, jouer une succession de jeux A ou une succession de jeux B est défavorable, avec une perte moyenne d'environ 1€ par partie, tandis que jouer en alternance les jeux A et B est favorable, avec une espérance de gain d'environ 1€ à chaque partie.