On considère la matrice : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est M.

1. **a)** Déterminer les valeurs propres de M.

b) Établir que f est diagonalisable. Déterminer une base $(\mathrm{V}_1; \mathrm{V}_2; \mathrm{V}_3)$ de vecteurs propres de f que l'on choisira de manière que chacun d'eux ait, dans la base $\mathcal{B}$, des coordonnées égales à 0 ou à 1.

c) Soit a et b deux réels quelconques et $f_{a,b} = af + b\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Montrer que $f_{a,b}$ est diagonalisable.

2. À tout vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on associe la fonction ϕ_y de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout $x = (x_1; x_2; x_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\phi_y(x) = (y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2 + y_3 x_3.$$

a) Le vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ étant fixé, exprimer $\phi_y(f(x))$ en fonction des coordonnées x_1, x_2 et x_3 de x.

b) Montrer qu'à chaque vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut faire correspondre un vecteur $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_1; \mathrm{Y}_2; \mathrm{Y}_3)$ et un seul dans $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $\phi_y(f(x)) = \phi_{\mathrm{Y}}(x)$.
À cet effet, on exprimera Y_1, Y_2 et Y_3 en fonction de y_1, y_2 et y_3.

c) On pose $g(y) = \mathrm{Y}$. Vérifier que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice N dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On considère la matrice : $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est S.

a) Vérifier que S est inversible et calculer S^{-1}.

b) Calculer le produit SMS^{-1}.

c) En déduire que les vecteurs $s(\mathrm{V}_1)$, $s(\mathrm{V}_2)$ et $s(\mathrm{V}_3)$ sont des vecteurs propres de la matrice ${}^t\mathrm{N}$, transposée de N. Préciser les valeurs propres associées.

d) En déduire que N est diagonalisable.