1. **a)** Déterminons le rang de $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \mathrm{L1} \longleftrightarrow \mathrm{L3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{L2} + 2\cdot\mathrm{L1} \longrightarrow \mathrm{L2} \\ \mathrm{L3} + (\lambda-1)\cdot\mathrm{L1} \longrightarrow \mathrm{L3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda+3 \\ 0 & -\lambda-2 & -2\cdot\lambda+8 \\ 0 & -\lambda-2 & -\lambda^2+4\cdot\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L3} - \mathrm{L2} \longrightarrow \mathrm{L3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda+3 \\ 0 & -\lambda-2 & -2\cdot\lambda+8 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\cdot\lambda-8 \end{pmatrix}$$

Or $-\lambda^2+6\cdot\lambda-8 = -(\lambda-4)\cdot(\lambda-2)$.

Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2;2;4\}$.

$\boxed{\mathrm{SpM} = \{-2;2;4\} = \mathrm{Sp}(f)}$

b) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $Card(\mathrm{Sp}(f)) = 3$ la condition suffisante de diagonalisabilité s'applique.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

$\mathrm{E}_{-2} = \mathrm{Vect}((1;1;0))$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}((0;1;1))$ et $\mathrm{E}_4 = \mathrm{Vect}((1;0;1))$.

Donc $\boxed{\mathrm{V}_1 = (1;1;0),\ \mathrm{V}_2 = (0;1;1) \text{ et } \mathrm{V}_3 = (1;0;1))}$ conviennent.

c) Soit V un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ.

$f_{a,b}(\mathrm{V}) = af(\mathrm{V}) + b\mathrm{V} = (a\lambda+b)\mathrm{V}$, donc V est un vecteur propre de $f_{a,b}$. Donc $(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2,\mathrm{V}_3)$ est une base formée de vecteurs propres de $f_{a,b}$. Donc $\boxed{f_{a,b} \text{ est diagonalisable}}$.

2. **a)** $\phi_y(f(x)) = (y_1+y_2)(x_1-3x_2+3x_3)+(y_1+2y_2)(-2x_1+3x_3)+y_3(x_1-x_2+3x_3)$
$= (-y_1-3y_2+y_3)x_1 + (-3y_1-3y_2-y_3)x_2 + (5y_1+7y_2+3y_3)x_3$

$\phi_\mathrm{Y}(x) = (\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2)x_1 + (\mathrm{Y}_1+2\mathrm{Y}_2)x_2 + \mathrm{Y}_3x_3$, donc pour que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\phi_y(f(x)) = \phi_\mathrm{Y}(x)$, il suffit que

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2 &=& -y_1-3y_2+y_3 \\ \mathrm{Y}_1+2\mathrm{Y}_2 &=& -3y_1-3y_2-y_3 \\ \mathrm{Y}_3 &=& 5y_1+7y_2+3y_3 \end{array} \right.$$

, cette condition est nécessaire comme on le voit en prenant $x = (1;0;0)$, $x = (0;1;0)$ puis $x = (0;0;1)$. Or $(\mathcal{S})$ admet une unique solution :

$$\boxed{(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Y}_1 &=& y_1-3y_2+3y_3 \\ \mathrm{Y}_2 &=& -2y_1-2y_3 \\ \mathrm{Y}_3 &=& 5y_1+7y_2+3y_3 \end{array} \right.}.$$

L'appliction $g : y \mapsto \mathrm{Y}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ car les trois coordonnées de $\mathrm{Y} = g(y)$ sont des combinaisons linéaires des trois coordonnées de y. Le système $(\mathcal{S})$ montre que dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de g est $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{L2} - \mathrm{L1} \longrightarrow \mathrm{L2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{L1} - \mathrm{L2} \longrightarrow \mathrm{L1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

S est est inversible car de rang 3 et $\boxed{\mathrm{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Alors $\boxed{\mathrm{SMS}^{-1} = {}^t\mathrm{N}}$.

Soit V un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. En identifiant V à la matrice colonne formée par ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (comme le fait l'énoncé), on a ${}^t\mathrm{N}(\mathrm{SV}) = \mathrm{SMS}^{-1}\mathrm{SV} = \mathrm{SMV} = \mathrm{S}(\lambda\mathrm{V}) = \lambda\mathrm{SV}$, donc $s(\mathrm{V})$ est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{N}$ associé à la valeur propre λ.

$\boxed{s(\mathrm{V}_1),\ s(\mathrm{V}_2) \text{ et } s(\mathrm{V}_3) \text{ sont trois vecteurs propres de } {}^t\mathrm{N} \text{ associés respectivement aux valeurs propres -2, 2 et 4.}}$

Comme $\mathrm{rg}(\mathrm{N}-\lambda\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}({}^t(\mathrm{N}-\lambda\mathrm{I}_3)) = rg({}^t\mathrm{N}-\lambda\mathrm{I}_3)$, N et sa transposée ont les mêmes valeurs propres, donc N admet 3 valeurs propres distinctes -2, 2 et 4.

Comme $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\boxed{\mathrm{N} \text{ est diagonalisable.}}$