Tout le monde traitera la partie I, les prétendant(e)s aux sous-parisiennes et plus traiteront en plus la partie II qui constitue une généralisation.

PARTIE I. Promenade barisienne.

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = XP(X) - \frac{X(X-1)}{3}P'(X).$$

1. Pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, calculer $f(X^k)$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ **Attention**, les vecteurs ne sont pas dans l'ordre usuel de la base canonique.
4. Justifier que f est diagonalisable.
5. Déterminer les sous-espaces propres de f .
6. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres de f tels que la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure et dont la première ligne ne contienne que des 1.
7. Montrer que $P^2 = I_4$ et en déduire P^{-1} . Sans effectuer le produit matriciel, expliquer ce que vaut $D = PMP$.
8. Exprimer M^m en fonction de P et D^m pour tout entier naturel m .

PARTIE II. Escapade parisienne.

Soit n un entier naturel non nul. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = XP(X) - \frac{X(X-1)}{n}P'(X).$$

1. a) Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $f(X^k)$.
b) Démontrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$.
b) Justifier que f est diagonalisable.
3. a) Montrer que si $\deg(P) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P) + 1$.
b) En déduire que les vecteurs propres de f sont tous de degré n .
c) Montrer que les vecteurs propres de f n'admettent que 0 ou/et 1 pour racines.
Indication : Si P est un vecteur propre, vous pourrez écrire $P = X^p(X-1)^qR(X)$ avec $R(0) \neq 0$ et $R(1) \neq 0$ et montrer que R est constant.
- d) En déduire les sous-espaces propres de f .
4. On pose, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P_k = X^k(X-1)^{n-k}.$$
On considère la base $\mathcal{B}'$ définie par

$$\mathcal{B}' = (P_n, P_{n-1}, \dots, P_1, P_0).$$
On note Π la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
a) Expliciter Π en donnant ses coefficients.
b) Montrer que $\Pi^2 = I_{n+1}$.
c) Donner la matrice $\Pi M \Pi$.