

PARTIE I. Promenade barisienne.

1. Pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $f(X^k) = X \cdot X^k - \frac{X(X-1)}{3} k X^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{3}\right) X^{k+1} + \frac{k}{3} X^k$.
2.
 - Soit $(P, Q) \in E^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
 $f(aP+Q) = X((aP+Q)(X)) + \frac{X(X-1)}{3} (aP+Q)'(X) = X(aP(X)+Q(X)) + \frac{X(X-1)}{3} (aP'(X)+Q'(X)) = af(P)+f(Q)$.
 Donc f est une application linéaire.
 - On remarque, d'après la première question, que si $k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, $\deg f(X^k) = k+1$ et si $k=3$, $f(X^k) = X^k$. Ainsi, par linéarité, pour tout P de E , $\deg f(P) \leq 3$.
- Détaillons : $f(aX^3 + bX^2 + cX + d) \stackrel{\text{lin.}}{=} af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) \in \mathbb{R}_3[X]$ d'après 1.
- f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. D'après 1), $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont coefficients diagonaux. Comme M représente f ,
 « triangulaire n'entraîne pas diagonalisable ! » : par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable puisque $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et $\dim(E_1) = 2 - \text{rg}(A - I_2) = 1 < 2$...
 $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M) = \{0; 1/3; 2/3; 1\}$.
 f est un endomorphisme de E ayant 4 valeurs propres distinctes, et $\dim E = 4$, donc
 f est diagonalisable.
5. Les sous-espaces propres de f sont nécessairement de dimension 1.
 - Comme $f(X^3) = X^3$, $E_1 = \text{Vect}(X^3)$.
 - Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. P est représenté par $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Alors : $P \in E_\lambda \Leftrightarrow f(P) = \lambda P \Leftrightarrow MU = \lambda U \Leftrightarrow (M - \lambda I_4)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a + \frac{1}{3}b = 0 \\ (\frac{2}{3}-\lambda)b + \frac{2}{3}c = 0 \\ (\frac{1}{3}-\lambda)c + d = 0 \\ -\lambda d = 0 \end{cases}$.

On obtient quasi-instantanément :

 - pour $\lambda = 2/3$, $E_{2/3} = \text{Vect}(X^3 - X^2)$
 - pour $\lambda = 1/3$, $E_{1/3} = \text{Vect}(X^3 - 2X^2 + X)$
 - pour $\lambda = 0$, $E_0 = \text{Vect}(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$

On demande les sous-espaces propres de f , pas de M ! Ce sont des espaces de polynômes, engendrés par des polynômes et non par des colonnes.
6. Si $\mathcal{B}' = (X^3, X^3 - X^2, X^3 - 2X^2 + X, X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
7. $P^2 = I_4$ donc $P \times P = I_4$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = P$.
 Par le théorème de changement de base, $D = PMP = P^{-1}MP = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Or $\mathcal{B}'$ est une base formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 1, 2/3, 1/3 et 0. Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. $M = PDP^{-1}$ donc $M^m = PD^mP^{-1}$ et puisque $P^{-1} = P$, $M^m = PD^mP$.
Pas de calculs inutiles : l'énoncé dit d'exprimer M^m à l'aide de P et D^m , mais ne demande pas le calcul explicite de tous les coefficients.

PARTIE II. Escapade parisienne.

1. Idem partie I.
2. Idem partie I. $\text{Sp}(f) = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} = \{\frac{k}{n}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.
Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$.
3. a) On sait que, si $k \leq n-1$, alors $\deg(f(X^k)) = k+1$.
Par linéarité, $\boxed{\text{si } \deg(P) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \text{ alors } \deg(f(P)) = \deg(P) + 1}$.
b) • Si P est un vecteur propre associé à λ avec $\lambda \neq 0$, $f(P) = \lambda P$ donc $\deg(f(P)) = \deg(P)$, ce qui d'après la question précédente n'est possible que si $\deg(P) = n$.
• Si $f(P) = 0$, en observant le système $MU = 0$ (où $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P)$), on constate que si le premier coefficient de U est nul, alors tous les coefficients suivants le sont, et P est nul. Autrement dit, si $\deg P < n$, alors P n'est pas un vecteur propre associé à 0.
• Conclusion : $\boxed{\text{les vecteurs propres de } f \text{ sont tous de degré } n}$.
c) Les vecteurs propres de f sont tous de degré n . Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre λ . Posons $P(X) = X^p(X-1)^q R(X)$ avec $R(0) \neq 0$ et $R(1) \neq 0$.
 $\lambda P = f(P) \Rightarrow$
$$\lambda P = X^{p+1}(X-1)^q R(X) - \frac{X(X-1)}{n} (pX^{p-1}(X-1)^q R(X) + qX^p(X-1)^{q-1} R(X) + X^p(X-1)^q R'(X)) \Rightarrow$$
$$\lambda P = X^p(X-1) \left(XR(X) - \frac{p}{n}(X-1)R(X) - \frac{q}{n}XR(X) - \frac{X(X-1)}{n}R'(X) \right).$$
Par unicité du quotient dans la division euclidienne,
$$\lambda R = XR(X) - \frac{p}{n}(X-1)R(X) - \frac{q}{n}XR(X) - \frac{X(X-1)}{n}R'(X).$$
En prenant cette relation pour $X=0$ puis $X=1$,
 $\lambda R(0) = \frac{p}{n}R(0)$ et $\lambda R(1) = \left(1 - \frac{q}{n}\right)R(0)$, et comme $R(0)R(1) \neq 0$, $\lambda = \frac{p}{n} = 1 - \frac{q}{n}$.
Ainsi, $p+q=n$, donc R est constant et $P = X^p(X-1)^{n-p}$.
 $\boxed{\text{Les vecteurs propres de } f \text{ n'admettent que } 0 \text{ et } 1 \text{ comme racines.}}$
d) D'après ce qui précède, $P = X^p(X-1)^{n-p}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\frac{p}{n}$.
 $\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont les } E_{p/n} = \text{Vect}(X^p(X-1)^{n-p}) \text{ pour } p \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.
4. a) $X^k(X-1)^{n-k} = X^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i X^{n-k-i} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i X^{n-i}$.
En numérotant les lignes et colonnes de 0 à n , la matrice Π est $^{(1)}$ alors $\boxed{\pi_{i,j} = \left((-1)^i \binom{j}{i} \right)_{i,j}}$.
b) Calculons les coefficients de Π^2 .
$$\sum_{k=0}^n \pi_{i,k} \pi_{k,j} = \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \binom{j}{k}.$$
 Cette somme est nulle si $i > j$ puisque dans chaque terme, l'un (au moins) des binomiaux est nul.
Continuons en supposant $i \leq j$:
$$\sum_{k=0}^n \pi_{i,k} \pi_{k,j} = \sum_{k=i}^j (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = \frac{j!}{i!} (-1)^i \sum_{k=i}^j \frac{(-1)^k}{(k-i)!(j-k)!} = \frac{j!}{i!} \sum_{k=0}^{j-i} \frac{(-1)^k}{k!(j-i-k)!}$$
$$= \frac{j!}{i!(j-i)!} \sum_{k=0}^{j-i} \binom{j-i}{k} (-1)^k = \frac{j!}{i!(j-i)!} (1-1)^{j-i} = \binom{j}{i} 0^{j-i} = \delta_i^j. \dots \text{ car } 0^0 = 1$$

Ainsi $\boxed{\Pi^2 = I_n \text{ et } \Pi^{-1} = \Pi}$.
c) $\Pi M \Pi = \Pi^{-1} M \Pi$ est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres associés respectivement à $1, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0$.
Donc $\boxed{\Pi M \Pi \text{ est la matrice diagonale de } \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ portant } 1, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0 \text{ dans cet ordre sur sa diagonale.}}$

(1). Rappelons que $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$.