

EXERCICE 1.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté

dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice M .

Autrement dit : $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

$\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leur produit scalaire canonique.

1. Calculer $(M - 5I)(M + I)$ et en déduire les valeurs propres de f et les sous espaces propres associés.
2. Justifier que f est diagonalisable.
3. Montrer que les deux sous-espaces propres de f sont les supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
4. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f .
5. Soit p la projection de E sur E_{-1} parallèlement à $E_5 = E_{-1}^\perp$, appelée « projection orthogonale » sur E_{-1} .
Soit $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$.
 - a) Déterminer les endomorphismes q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$.
 - b) On appelle respectivement A et B les matrices de p et q dans la base $\mathcal{C}$.
Donner A et en déduire B .
 - c) Justifier que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = 5B - A$.
6. Calculer M^n en fonction de n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 2.

Soit n une entier naturel au moins égal à 2.

On désigne par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les sous-ensembles de $E \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés des matrices symétriques et antisymétriques définis par :

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{M \in E / {}^tM = M\},$$

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{M \in E / {}^tM = -M\}.$$

On définit que E^2 l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tA.B).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Soit $p : E \rightarrow E, M \mapsto \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

- a) Montrer que p est un projecteur de E .
- b) En **déduire** que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont supplémentaires dans E .
- c) Montrer que $\mathcal{A}$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}$.

3. a) Montrer, **sans revenir aux coefficients de C** , que, si $C \in \mathcal{S}$, alors $\text{Tr}(C^2) \geq 0$.

- b) À quelle condition *sine qua non* y a-t-il égalité ?

4. Soit A et B dans $\mathcal{A}$. On souhaite prouver que $\text{Tr}((AB - BA)^4) \geq 0$.

- a) Étudier la symétrie de $(AB - BA)^2$, et conclure.

- b) Montrer que $\text{Tr}((AB - BA)^4) = 0$ si, et seulement si, $AB = BA$.

5. Démontrer une inégalité analogue dans les cas suivants :

- a) $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{S}$. b) $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{S}$.

DE LA PARABOLE À LA PAROLE

(extraits du *Dictionnaire historique de la langue française*, éd. Le Robert)

❶ PARABOLE n. f. (1265), d'abord parable (fin XIII^{ème} s.), est emprunté au latin ecclésiastique parabole, parabola « récit allégorique des livres saints sous lequel se cache un enseignement », spécialisation du sens classique de « similitude, comparaison ». Le mot latin est un emprunt au grec parabolê « comparaison », lui-même attesté au sens chrétien dans la traduction grecque du Nouveau Testament. C'est un dérivé du verbe paraballein, proprement « jeter auprès de », d'où « mettre côte à côte, comparer », formé de para « à côté » et de ballein « atteindre (d'un trait) », qui contient une racine indoeuropéenne et a été emprunté par le latin sous la forme ballare. S'y rattachent de nombreuses formes nominales avec leurs dérivés, dont beaucoup sont passées en français (❷ diable, emblème, parole).

Le mot est d'abord relevé dans les Sermons de saint Bernard sur le Cantique des Cantiques à propos des sentences de Salomon, également appelés proverbes. Il s'applique surtout à l'Évangile.

Au cours du XIII^{ème} s., parabole a pris le sens moins strictement biblique de « récit allégorique sous lequel se cache un enseignement » (v. 1278). Son dérivé PARABOLISTE adj. et n. (1891), « auteur de paraboles », est rare.

L'adjectif correspondant à parabole, PARABOLIQUE est emprunté (début XVI^{ème} s.) au bas latin parabolicus (IV^{ème} s.), lequel est un emprunt au grec tardif parabolikos « propre à servir de comparaison à », dérivé de parabolê.

L'adverbe dérivé de parabolique, PARABOLIQUEMENT (1450), fait penser que l'adjectif existait dès le XV^{ème} siècle.

② PARABOLE n. f. est emprunté (1555) au grec parabolê « comparaison, rapprochement » (☞ ① parabole), spécialisé en mathématiques au sens de « courbe plane décrite par un point dont la distance à un point fixe est constamment égale à sa distance à une droite fixe ».

Parabole, introduit comme terme de géométrie, se dit par extension de la forme d'une chose concrète, d'un mouvement, d'une courbe qui décrit plus ou moins une parabole (1727, de la trajectoire d'un projectile).

Depuis 1980 environ, on nomme parabole une antenne de télévision parabolique. Le mot a une fréquence extrême en français du Maghreb, où on emploie la substantivation une parabolique (ci-dessous).

De parabole est dérivé PARABOLIQUE adj. (1571), « relatif à la parabole », terme de géométrie également passé dans l'usage courant (1755) et dans les vocabulaires spécialisés de la physique et de l'optique (1671, miroir parabolique), puis de la télévision (antenne parabolique) d'où une parabolique en français du Maghreb, où l'on emploie aussi le dérivé PARABOLÉ, ÉE adj. et n. « (personne) qui utilise une antenne parabolique ».

Le dérivé PARABOLIQUEMENT adv. semble induire par son ancienneté (1450) que parabole et parabolique existent antérieurement à la première attestation connue.

Ultérieurement, parabole a produit deux dérivés strictement didactiques : PARABOLOÏDE n. m. (1660) a pris le sens de « surface du second degré ne possédant pas de centre mais seulement un axe de symétrie » (attesté 1868, Littré).

PARABOLISER v. tr., d'usage rare, « donner une forme parabolique à », est lui aussi attesté en 1868.

③ PAROLE n. f. est issu (1080) du latin chrétien parabola devenu paraula, par chute du b, terme de rhétorique désignant une comparaison, une similitude (Sénèque, Quintilien) puis, chez les auteurs chrétiens la parabole (☞ parabole) et un discours grave, inspiré. Ce double sens est dû à l'hébreu māšāl, que le latin parabola a traduit (assumens parabolam suam « reprenant son discours », Job, XXVII, 1). Par la suite, rustica parabola sert à désigner la langue vulgaire. Parabola « faculté d'exprimer par le langage parlé » a supplanté le latin classique verbum dans l'ensemble des langues romanes (en dehors du roumain) grâce à la fréquence de son emploi dans l'usage religieux, verbum étant spécialement employé

dans cet usage pour traduire le grec logos.

Parole désigne en général l'expression orale, verbale des contenus de conscience, spécialement en ancien français l'action de faire parler (dans l'expression metre a parole, 1130-1140), et le langage oral considéré par rapport à l'élocution, au ton de la voix (1140), là où le français moderne emploie voix.

Parole désigne essentiellement la faculté d'exprimer sa pensée par le langage articulé (1165). Au XVII^{ème} s. sont apparues des acceptions spéciales portant l'accent d'une part sur l'art de parler, l'éloquence (1606), d'autre part sur le droit de parler (1688), aussi nommé droit à la parole.

Par métonymie, parole désigne aussi, dès les premiers emplois (1080), la suite de mots, le discours exprimant une pensée ; il correspond particulièrement, en emploi qualifié ou déterminé, à l'expression verbale d'une pensée remarquable (1180), à une promesse (1180), mais aussi à une phrase creuse, vide (1470, paroles pleines de vent). Sur ces fortes paroles... (attesté 1920) commente ironiquement une déclaration.

Depuis la fin du XII^{ème} s., il désigne spécialement l'enseignement (1188), en particulier l'expression de la pensée, de la volonté de Dieu telle qu'elle est révélée par l'Écriture sainte (1670, la Parole de Dieu) et par la tradition (fin XII^{ème} s.).

Comme le verbe parler, le mot est fertile en phraséologie, entrant dans nombre de locutions (notamment au XVII^{ème} s.), dont manquer à sa parole (1611), tenir parole (1669 ; 1640, sa parole), n'avoir qu'une parole (1690), parole d'honneur (1694), sur parole (1747), toutes relatives à la promesse. En interjection, parole d'homme ! correspond à « je le jure ».

Avec Saussure, le mot correspond (début XX^{ème} s.), en opposition à langue, au concept de réalisation observable du système linguistique ; ce concept n'étant pas lié à l'oral, on dira plus tard discours.

Parole n'a donné que deux dérivés homonymes.

Le premier, PAROLIER, IÈRE adj. et n., relevé une fois en 1584 au sens de « qui parle, parleur », dans une traduction d'Horace, a été repris fin XIX^{ème} s. avec le même sens dans grâces parolières (1896).

Il a été substantivé pour désigner celui qui éprouve le besoin de beaucoup parler, un bavard, mais reste rare et littéraire.

Le second, PAROLIER, IÈRE n. a été créé pour désigner l'auteur des paroles d'une chanson (1668, Bacilly [relevé par Cl. Duneton] : « le nom barbare de parolier » et réemployé vers 1840 [Gautier, 1843] pour un auteur de livrets d'opéra [Cf. librettiste]) ; de nos jours, il désigne surtout l'auteur du texte de certaines œuvres musicales (comédies, opérettes) et de chansons.

BONNE ANNÉE 2017 À TOUTES ET TOUS !