Exercice 1.

1. $(M-5I)(M+I)=0$, les valeurs propres possibles sont 5 et -1.

$\mathrm{rg}(M-5I)=2$ et $\mathrm{rg}(M+I)=1$, $\mathrm{Sp}(M)=-1;5$ et $E_5=\mathrm{Vect}((1,-2,1))$, $E_{-1}=\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,2))$.

2. $\dim E_5+\dim E_{-1}=3=\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc M et f sont diagonalisables

3. $E_5\oplus E_{-1}=\mathbb{R}^3$ car f est diagonalisable, donc ses sous-espaces propres sont supplémentaires.

$E_5\perp E_{-1}$ car $(1,-2,1)\perp(1,0,-1)$ et $(1,-2,1)\perp(0,1,2)$: les familles engendrant E_5 et E_{-1} sont orthogonales l'une à l'autre.

E_5 et E_{-1} sont les supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

4. Puisque E_5 et E_{-1} sont supplémentaires orthogonaux, en concaténant des bases orthonormales de chacun d'eux, on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

- $\left(\frac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)\right)$ est une base orthonormale de E_5.
- Cherchons une base orthogonale de E_{-1}. Soit $u=(1,0,-1)$ et $v=(0,1,2)$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $w=v+\alpha u=(\alpha,1,-\alpha+2)$.

$w\perp u\Leftrightarrow\langle w,u\rangle=0\Leftrightarrow\alpha+0+\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Prenons $w=(1,1,1)$: (u,w) est une base orthogonale de E_{-1}.

- $\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)\right)$ est une base orthonormale de E_{-1}.
- $\mathcal{C}\overset{\text{déf.}}{=}(a,b,c)\overset{\text{déf.}}{=}\left(\frac{1}{\sqrt6}(1,-2,1),\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

5. a) $q\circ q=\mathrm{Id}^2-p-p+p^2=\mathrm{Id}-p=q$.

$p\circ q=p\circ(\mathrm{Id}-p)=p-p\circ p=0$ ($p\circ p=p$ pour un projecteur) et de même $q\circ p=0$.

b) Comme $a\in E_5=\mathrm{Ker}p$, $p(a)=0$, et comme $b,c\in E_{-1}=\mathrm{Im}p$, $p(a)=a$ et $p(b)=b$.

Donc $A=\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(p)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Et $B=I_3-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

c) $\mathcal{C}$ étant une base constituée de vecteurs propres de f associés successivement à 5, -1 et -1, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=5B-A$

6. • Première méthode –

On peut prendre la matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ de la base canonique vers une base de vecteurs propres, et $D=\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$.

$P^{-1}=\frac16\begin{pmatrix}1&-2&1\\5&2&-1\\2&2&2\end{pmatrix}$ et on calcule M^n par

$\forall n\in\mathbb{N}, M^n=PD^nP^{-1}=$

$$\frac16\begin{pmatrix}5\cdot(-1)^n+5^n&2\cdot(-1)^n-2\cdot5^n&-(-1)^n+5^n\\2\cdot(-1)^n-2\cdot5^n&2\cdot(-1)^n+4\cdot5^n&2\cdot(-1)^n-2\cdot5^n\\-(-1)^n+5^n&2\cdot(-1)^n-2\cdot5^n&5\cdot(-1)^n+5^n\end{pmatrix}$$

• Seconde méthode –

On peut chercher à exploiter la question précécedente. Soit A' et B' les matrices représentant p et q dans $\mathcal{B}$.

Les relations sur p et q se traduisent par $A'B'=B'A'=0$, $A'^2=A$ et $B'^2=B$.

Comme A' et B' commutent, on peut appliquer la formule du binôme : $\forall n\geqslant1$,

$$M^n=(5B'-A')^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^kB'^k\times(-1)^{n-k}A'^{n-k}$$

et comme tous les termes du type $A'^iB'^j$ sont nuls pour $i\geqslant1$ et $j\geqslant1$,

$M^n=(-1)^nA'+5^nB'$

Reste à expliciter A' et B', par exemple par changement de base :

$$A'=PAP^{-1}=\frac16\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix},$$

$$B'=PBP^{-1}=\frac16\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. Déjà vu : bilinéarité par linéarité de la trace et de la transposition, symétrie car $\mathrm{Tr}(M)=\mathrm{Tr}({}^tM)$, positivité et définition car $\langle M,M\rangle=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2$.

2. a) p est un endomorphisme vérifiant $p\circ p=p$.

b) Puisque p est un projecteur, $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ sont supplémentaires. Or $\mathrm{Ker}p=\mathcal{A}$ et $\mathrm{Im}p=\{M/p(M)=M\}=\mathcal{S}$.

c) $\forall A\in\mathcal{A},\forall S\in\mathcal{S}$,

$\langle S, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^t SA) = \mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}({}^t A\, {}^t S) = \mathrm{Tr}(-AS) = -\langle S, A\rangle$,
Donc $\forall A \in \mathcal{A}, \forall S \in \mathcal{S}$, $\langle S, A\rangle = 0 : \mathcal{A} \perp \mathcal{S}$.

3. **a)** $\mathrm{Tr}(C^2) = \mathrm{Tr}({}^t C.C) = \langle C, C\rangle = ||C||^2 \geqslant 0$.

b) $\mathrm{Tr}(C^2) = 0 \Rightarrow ||C||^2 = 0 \Rightarrow C = 0$.
Réciproquement, $C = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(C^2) = 0$.

4. **a)** ${}^t(AB - BA) = {}^t B\, {}^t A - {}^t A\, {}^t B = BA - AB = -(AB - BA)$
Donc $AB - BA \in \mathcal{A}$. Or on peut observer que :
$M \in \mathcal{A} \Rightarrow M^2 \in \mathcal{S}$, car $M^2 = \left(-\,{}^t M\right)^2 = ({}^t M)^2 = {}^t(M^2)$
Ainsi $(AB - BA)^2$ est symétrique, donc par 3), $\mathrm{Tr}((AB - BA)^4) \geqslant 0$...

b) ... avec égalité si et seulemnt si $(AB - BA)^2 = 0$. Or :
$(AB - BA)^2 = 0 \Rightarrow -{}^t(AB - BA)(AB - BA) = 0 \Rightarrow ||AB - BA||^2 = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$.
Et la réciproque est évidente.

5. **a)** Soit $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{S}$. Alors $AB - BA$ est antisymétrique donc on peut appliquer exactement le même raisonnement qu'en 4).

b) Soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{S}$. Alors $AB - BA$ est symétrique donc on peut appliquer exactement le même raisonnement qu'en 3) : $\mathrm{Tr}((AB - BA)^2) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $AB = BA$.