Lancer un dé pour calculer π.

1. **a)** $x^2+y^2\leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{OM}^2\leqslant 1$: $\mathcal{Q}=\{\mathrm{M}=(x,y)\in\mathcal{C}/\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ est le quart de disque de centre O et de rayon 1 situé dans le carré $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{A}ire(\mathcal{Q})=\dfrac{\pi}{4}$ et $\mathcal{A}ire(\mathcal{C})=1$: la probabilité d'un point quelconque de $\mathcal{C}$ soit dans $\mathcal{Q}$ pourrait bien être $\dfrac{\pi/4}{1}=\dfrac{\pi}{4}$.

2. **a)**

```
function i=indic()
  x=rand();
  y=rand();
  d=x^2+y^2;
  if  (d<=1) then
    i=1
    else i=0
  end;
endfunction
```

b) L'algorithme suivant affiche `3.1498`, qui est 4 fois la fréquence de l'événment D au cours de 100000 simulations. Comme 100000 est très grand, cette fréquence s'approche de sa probabilité $\pi/4$.
Voilà pourquoi la valeur indiquée est proche de π.

c) `3.14424`, `3.14320` et `3.14980` ... proches de π !

3. **a)** sin est dérivable sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$, et $\sin'=\cos$ est strictement positive sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$. Donc sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$ donc est une bijection de $[-\pi/2\,;\pi/2]$ sur $\sin([-\pi/2\,;\pi/2])=[-1\,;1]$.
On appelle « *arc-sinus* » la bijection réciproque, notée arcsin.

b) Comme $\sin'$ ne s'annule pas sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$, arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$, avec :
Soit $y\in\,]-1\,;1[$. Notons $x=\arcsin(y)\in[-\pi/2\,;\pi/2]$.
$\arcsin'(y)=\dfrac{1}{\sin'(\arcsin(y))}=\dfrac{1}{\cos(x)}$.
Or $\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\sin(x)^2}=\sqrt{\cos(x)^2}=\cos(x)$ car $\cos(x)\geqslant 0$.
Donc $\arcsin'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

c) • $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[0\,;1]$. arcsin est continue sur $[0\,;1]$. Par composition, g est continue sur $[0\,;1]$.
• $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0\,;1[$ à valeurs dans $]0\,;1[$. arcsin est dérivable sur $]0\,;1[$. Par composition, g est dérivable sur $]0\,;1[$.

$$\forall x\in\,]0\,;1[,\qquad g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}\arcsin'(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

d) Soit a et b tels que $0<a<b<1$.

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}=g(b)-g(a)\xrightarrow[(a,b)\to(0,1)]{}g(1)-g(0)\text{ car } g \text{ est continue sur } [0\,;1].$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}=2\arcsin\sqrt{1}-2\arcsin\sqrt{0}=\pi$$

4. $\mathrm{X}^2(\Omega)=[0\,;1]$. $\forall y\in[0\,;1]$,
$\mathrm{F}_{\mathrm{X}^2}(y)=\mathbb{P}(\mathrm{X}^2\leqslant y)=\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant\sqrt{y})$ car $\mathrm{X}\geqslant 0$.
$\mathrm{F}_{\mathrm{X}^2}(y)=\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\sqrt{y})=\sqrt{y}$ car $\sqrt{y}\in[0\,;1]$.
Et $\mathrm{F}_{\mathrm{X}^2}(y)=0$ si $y<0$, $\mathrm{F}_{\mathrm{X}^2}(y)=1$ si $y>1$.

En dérivant sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x\in\,]0\,;1[,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x-t)\mathrm{d}t.$$

5.
- $h(x)$ se réduit à $\displaystyle\int_0^1 f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$ car $f(t)=0$ si $t\notin\,]0\,;1[$.
- Si $x\leqslant 0$ et $t\in\,]0\,;1[$, alors $x-t\leqslant 0$ et $f(x-t)=0$. Donc $h(x)=0$.
- Si $x\geqslant 2$ et $t\in\,]0\,;1[$, alors $x-t\geqslant 1$ et $f(x-t)=0$. Donc $h(x)=0$.

6. **a)** Pour $x\in\,]0\,;1[$, $h(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$, car $f(x-t)=0$ pour $t\geqslant x$.

b) À l'aide du changement de variable $u=\dfrac{t}{x}$, montrer que $h(x)$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

$$h(x)=\frac{1}{4}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\overset{u=t/x}{=}\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{ux}\sqrt{x-ux}}x\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}$$

7. **a)** Soit $x\in\,]1\,;2[$. $h(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$ n'est pas impropre !

b) Le même changement de variable que 6.b) donne $h(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{(x-1)/x}^{1/x}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}$.

c) $\forall x\in\,]1\,;2[,\quad h(x)=\dfrac{1}{4}\left(g(u)\right]_{1-1/x}^{1/x}=\dfrac{1}{4}\left(g\left(\dfrac{1}{x}\right)-g\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)$.
Comme g est continue sur $[0\,;1]$, h est continue que $]1\,;2[$.

8. **a)** Puisque h est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$, le théorème de convolution assure que h est une densité de $\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=\mathrm{D}$.

b) $\mathbb{P}(\mathrm{D}\leqslant 1)=\displaystyle\int_{-\infty}^1 h(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\pi}{4}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

9. **a)** $\mathrm{I}_i=\mathbb{1}_{[\mathrm{D}_i\leqslant 1]}\hookrightarrow\mathcal{B}(\mathbb{P}(\mathrm{D}_i\leqslant 1)))$ c'est-à-dire $\mathcal{B}(\pi/4)$.

b) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ et $Z_n = \frac{1}{n} S_n$.

Les (I_i) étant indépendantes, par stabilité de la loi binomiale, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \pi/4)$.

Donc $\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$.

Par indépendance des I_i,

$\mathbb{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2} \times n\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Quand n devient grand, Z_n ce comporte quasiment comme une variable constante, donc est très proche de son espérance $\pi/4$. Ceci explique que pour $n = 100000$, $4Z_n \simeq \pi$, ce que montre les simulations de 2.

Visualisation

En exécutant quatre fois ce script :

```
n=10000;
i=zeros(1,n);
z=zeros(1,n);
for k=1:n
    i(k)=indic();          //Ik est la k-ème simulation
    z(k)=mean(y(1:k));   //Zk est la moyenne des k premières simulations
end;
plot2d("ln",10:n,4*z(10:n));
plot2d([10,10000],[%pi,%pi])
```