Ce devoir reprend l'énoncé original de la partie I de maths 2 2014 (questions 1. à 3.), puis propose une relecture « plus accessible » de cette partie (questions 4. à 11.).

La question 1. est traitable par tous. Si l'on rencontre des difficultés dans les questions 2. ou 3., on peut passer aux questions 4. et suivantes qui éclaireront certainement, puis revenir aux questions 2. et 3. en fin de parcours.

MATHS 2 2014 - PARTIE I

Lois généralisées de Bernoulli

k désigne un entier naturel au moins égal à 2 et I_k la matrice unité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Si $d = (d_1 \ d_2 \ \ldots \ d_k)$ est une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,k}(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Diag}(d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $d_1, d_2, \ldots, \ d_k$ (dans cet ordre).

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, on note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ et pour tout $i \in [\![1\,;\,k]\!]\,, p_i \geqslant 0$.

u désigne la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne non nulle $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$.

On pose $\mathrm{M} = a\,{}^{\mathrm{t}}u$.

a) Calculer la matrice M et préciser son rang.

b) Calculer la matrice Ma et en déduire une valeur propre de M.

c) Montrer que $\mathrm{M}^2 = \alpha\mathrm{M}$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?

d) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$.

e) Pour quelles valeurs de α la matrice $\mathrm{I}_k - \mathrm{M}$ est-elle inversible ?

f) On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau. Dans quel cas ce projecteur est-il orthogonal ?

On dit qu'un vecteur aléatoire $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_k)$ suit la *loi généralisée de Bernoulli de paramètre* p, notée $\mathcal{B}_k(p)$, si on a :

$$\forall i \in [\![1\,;\,k]\!]\,, \mathbb{P}([\mathrm{X} = e_i]) = p_i, \text{ avec } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{X}_k \end{pmatrix}.$$

Pour un tel vecteur X, on note

$$\mathcal{E}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\mathrm{X}_1) \\ \mathbb{E}(\mathrm{X}_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\mathrm{X}_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) & \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2) & \cdot & \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_k) \\ \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_1) & \mathbb{V}(\mathrm{X}_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_1) & \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_2) & \ldots & \mathbb{V}(\mathrm{X}_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \ .$$

On remarquera que $\mathcal{V}(\mathrm{X})$ est une matrice symétrique.

2. Soit $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_k)$ un vecteur aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}_k(p)$.

a) Pour $i \in [\![1\,;\,k]\!]$, comparer les événements $[\mathrm{X} = e_i]$ et $[\mathrm{X}_i = 1]$; en déduire que chaque variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i et écrire la matrice $\mathcal{E}(\mathrm{X})$.

b) Quelle est la loi de la variable $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$?

c) Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = -p_1p_2$.

d) Écrire la matrice $\mathcal{V}(\mathrm{X})$.

3. Soit $\mathrm{M}(p)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{M}(p) = p\,{}^{\mathrm{t}}u$.

a) Vérifier l'égalité : $\mathcal{V}(\mathrm{X}) = \big((\mathrm{I}_k - \mathrm{M}(p)\big)\mathrm{Diag}(p)$.

b) Montrer que si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont tous différents de 0, le rang de $\mathcal{V}(X)$ est égal à $k-1$.

c) Soit σ une permutation de $[\![1\,;\,k]\!]$ et p_σ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(k)}$. Montrer que $\mathcal{V}(X)$ est semblable à $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.

d) Exprimer le rang de $\mathcal{V}(X)$ en fonction du nombre d'éléments i de $[\![1\,;\,k]\!]$ pour lesquels on a $p_i \neq 0$.

MATHS 2 2014 - D'APRÈS PARTIE I

Lois généralisées de Bernoulli, version concrète

Soit k un entier naturel au moins égal à 2.
Une urne contient des boules de k couleurs différentes $C_1, C_2, \dots, C_k$. Pour chaque i de $[\![1\,;\,k]\!]$, la proportion de boules de couleur C_i dans l'urne est p_i.
Dans cette urne, on tire une boule au hasard et, pour tout i de $[\![1\,;\,k]\!]$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement *« la boule tirée est de couleur C_i »*.

4. Justifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

5. a) Les variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ sont-elles indépendantes ?

b) Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$?

Soit X la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ définie par $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{V}(X)$ le vecteur espérance et la matrice de covariance de X, définis par :

$$\mathcal{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$$\mathcal{V}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdot & \mathrm{Cov}(X_1,X_k) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_2,X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_k,X_1) & \mathrm{Cov}(X_k,X_2) & \dots & \mathbb{V}(X_k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) .$$

On remarquera que $\mathcal{V}(X)$ est une matrice symétrique.

6. a) Quelle est la loi de X_1 ?

b) Expliciter $\mathcal{E}(X)$ en fonction des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

7. a) Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Bernoulli en précisant son paramètre.

b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2$.

c) Expliciter finalement $\mathcal{V}(X)$ en fonction des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

8. Quitte à modifier l'ordre des couleurs, on suppose que les j premiers p_i sont tous non nuls, et que les $k-j$ suivants sont tous nuls, avec $j = k$ si tous les p_i sont non nuls.

a) Justifier que $\mathrm{rg}(\mathcal{V}(X)) \leqslant j$.
On note $\mathcal{W}$ la matrice de $\mathcal{M}_j(\mathbb{R})$ obtenue en ne prenant que les $j \times j$ premiers coefficients de $\mathcal{V}(X)$:

$$\forall (m,n) \in [\![1\,;\,j]\!]^2, \quad (\mathcal{W})_{m,n} = \big(\mathcal{V}(X)\big)_{m,n}.$$

On note q la colonne de $\mathcal{M}_{j,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1\,;\,j]\!], q_i = p_i$.
On note u la colone de $\mathcal{M}_{j,1}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.
On note enfin M la matrice de $\mathcal{M}_j(\mathbb{R})$ définie par $M = q\,{}^t u$ et Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_j(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $p_1, p_2, \dots, p_j$ (dans cet ordre).

b) Montrer que $\mathcal{W} = \big(I_j - M\big)\Delta$.

9. a) Expliciter M et donner son rang.

b) Calculer ${}^t u q$ et en déduire que M est une matrice de projecteur.

c) Donner $\dim(\mathrm{SEP}(M,0))$ et $\dim(\mathrm{SEP}(M,1))$.

d) Montrer que $I_j - M$ est une matrice de projecteur.

e) Justifier que $\mathrm{SEP}(I_j - M, 1) = \mathrm{SEP}(M, 0)$.

f) En déduire le rang de $I_j - M$.

10. a) Montrer que si A est une matrice de $\mathcal{M}_j(\mathbb{R})$ et B une matrice inversible de $\mathcal{M}_j(\mathbb{R})$, alors A et AB sont de même rang.

b) En déduire le rang de $\mathcal{W}$, puis celui de $\mathcal{V}(X)$.