MATHS 2 2014 - PARTIE I

Lois généralisées de Bernoulli

1. a) Pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, tous les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M valent a_i . Toutes les lignes étant proportionnelles et au moins l'une d'entre elles étant non nulle car $a \neq 0$, M est de rang 1.

Il peut être intéressant de remarquer que ${}^t u a = \langle u, a \rangle = \alpha \dots$

- b) $Ma = (a^t u)a = a({}^t u a) = \alpha a$ donc, comme $a \neq 0$, $\alpha \in \text{Sp}(M)$.
 c) Comme ${}^t u a = \langle u, a \rangle = \alpha$, $M^2 = (a^t u)(a^t u) = a({}^t u a)^t u = \alpha M$.
 $X^2 - \alpha X = X(X - \alpha)$ est annulateur de M donc les valeurs de M sont parmi ses racines : $\text{Sp}(M) \subset \{0, \alpha\}$.
 d) • $\dim \text{SEP}(M, 0) = \dim \text{Ker} M = n - \text{rg}(M) = n - 1$.
 • Si $\alpha = 0$, alors M n'a que la valeur propre 0 et $\dim \text{Ker} M < n$: M n'est pas diagonalisable.
 • Si $\alpha \neq 0$, alors $\text{Sp}(M) = \{0, \alpha\}$ et $\dim E_0 + \dim E_\alpha = n$: M est diagonalisable.
 e) $I_k - M$ inversible ssi $\text{rg}(I_k - M) = n$ ssi $\text{rg}(M - I_k) = n$ ssi $1 \notin \text{Sp}(M)$ ssi $\alpha \neq 0$.
 f) $\alpha = 1$. Par 1.c) $M^2 = M$ et M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ d'un projecteur f dont l'image est $\text{Vect}(a)$ (toutes les colonnes de M valent a) et le noyau est $\text{Vect}(u)^\perp$ car, pour toute colonne x de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$,
 $Mx = 0 \Leftrightarrow a^t u x = 0 \Leftrightarrow \langle u, x \rangle a = 0 \Leftrightarrow \langle u, x \rangle = 0$ car $a \neq 1$.
 Ce projecteur est orthogonal si, et seulement si, $\text{Im} f = (\text{Ker} f)^\perp$, c'est-à-dire $\text{Vect}(a) = (\text{Vect}(u)^\perp)^\perp$, i.e. $a \in \text{Vect}(u)$.

f est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $a = \frac{1}{k} \times u$ car $\alpha = 1$.

2. a) Soit $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$. On a clairement $[X = e_i] \subset [X_i = 1]$. On remarque alors que :
 • les $[X = e_i]_{1 \leq i \leq k}$ sont deux à deux compatibles ;
 • $\sum_{i=1}^k \mathbb{P}([X = e_i]) = \sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Les $([X = e_i])_{1 \leq i \leq k}$ forment un système complet d'événements!!!

Par la formule des probabilités avec ce système :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X = e_j]) = \sum_{i \neq j} 0 + \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X = e_i]) = p_i.$$

Comme $\mathbb{P}([X = e_i]) = \mathbb{P}([X_i = 1])$ avec $[X = e_i] \subset [X_i = 1]$,
 $[X = e_i] = [X_i = 1]$.

On constate en particulier que $X_i = 1$ entraîne $X_j = 0$ pour tout $j \neq i$.

Et $X_i \leftrightarrow \mathcal{B}(p_i) \dots$ et ceci étant valable pour tout i , $\mathcal{E}(X) = p$.

- b) Comme : $[X_1 = 1] \subset [X_2 = 0]$ et $[X_2 = 1] \subset [X_1 = 0]$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1\}$.

Remarque : Sauf si $k = 2$, car alors une de ces deux variables vaut 1, et $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{1\}$. Cas sans intérêt.

Comme $\mathbb{P}([X_1 + X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cup [X_2 = 1])$

$$\stackrel{\text{incomp.}}{=} \mathbb{P}([X_1 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 1]) = p_1 + p_2, \quad X_1 + X_2 \leftrightarrow \mathcal{B}(p_1 + p_2).$$

c) $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2))$
 $= \frac{1}{2} ((p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2))$
 $= -p_1 p_2$

- d) • $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, (\mathcal{V}(X))_{i,i} = p_i(1 - p_i)$.
 • $\forall (i, j) \in \llbracket 1; k \rrbracket^2$ avec $i \neq j, (\mathcal{V}(X))_{i,j} = -p_i p_j$.

3. a)

En multipliant une matrice à droite par une matrice diagonale, on multiplie ses colonnes par les coefficients digononaux.

- Déterminons les coefficients diagonaux de $(I_k - M(p))\text{Diag}(p)$.
 $(I_k - M(p))_{i,i} = 1 - p_i$, et $((I_k - M(p))\text{Diag}(p))_{i,i} = (1 - p_i) \times p_i$.
 • Déterminons les coefficients non-diagonaux de $(I_k - M(p))\text{Diag}(p)$.
 $(I_k - M(p))_{i,j} = -p_i$, et $((I_k - M(p))\text{Diag}(p))_{i,j} = -p_i \times p_j$.

On a bien : $\mathcal{V}(X) = ((I_k - M(p))\text{Diag}(p))$.

- b) Par la première question, $\text{rg}(I_k - M(p)) = k - \dim(\text{Ker}(I_k - M(p))) = k - \dim(\text{SEP}(M(p), 1)) = k - 1$.

En multipliant une matrice A par une matrice B inversible, le rang est conservé : $\text{rg}(A) = \text{rg}(AB)$, cf. question 10).

Comme les p_i sont tous non nuls, $\text{Diag}(p)$ est inversible.

Donc $\text{rg}(\mathcal{V}(X)) = \text{rg}(I_k - M(p)) = k - 1$.

- c) Soit Q la matrice associée à cette permutation, c'est-à-dire la matrice représentant dans $\mathcal{B}$ l'endomorphisme défini par : $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, f(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
 Alors Q^{-1} est la matrice représentant $f^{-1} : e_i \mapsto e_{\sigma^{-1}(i)}$.
 Montrons que : $Q^{-1}(I_k - M(p))\text{Diag}(p)Q = (I_k - p_\sigma {}^t u)\text{Diag}(p_\sigma)$.
 Pour cela, calculons l'image des vecteurs de la base canonique par $Q^{-1}(I_k - M(p))\text{Diag}(p)Q$, puis par $(I_k - p_\sigma {}^t u)\text{Diag}(p_\sigma)$. Soit $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$.

• $Qe_i = e_{\sigma(i)}, \quad \text{Diag}(p)Qe_i = p_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}$,
 $(I_k - M(p))\text{Diag}(p)Qe_i = \sum_{j \neq \sigma(i)} p_j p_{\sigma(i)} e_j + (1 - p_{\sigma(i)}) p_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$,

$Q^{-1}(I_k - M(p))\text{Diag}(p)Qe_i = \sum_{j \neq \sigma(i)} p_j p_{\sigma(i)} e_{\sigma^{-1}(j)} + (1 - p_{\sigma(i)}) p_{\sigma(i)} e_i$.

Pour plus de lisibilité, on peut ré-indexer la somme en posant $j = \sigma(\ell)$:

$$Q^{-1}(I_k - M(p))\text{Diag}(p)Qe_i = \sum_{\ell \neq i} p_{\sigma(\ell)}p_{\sigma(i)}e_\ell + (1 - p_{\sigma(i)})p_{\sigma(i)}e_i.$$

- $\text{Diag}(p_\sigma)e_i = p_{\sigma(i)}e_i,$
 $(I_k - p_\sigma^t u)\text{Diag}(p_\sigma)e_i = \sum_{\ell \neq i} p_{\sigma(\ell)}p_{\sigma(i)}e_\ell + (1 - p_{\sigma(i)})p_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)},$

- On a prouvé : $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, Q^{-1}\mathcal{V}(X)Qe_i = (I_k - p_\sigma^t u)\text{Diag}(p_\sigma)e_i,$
ce qui prouve que les endomorphismes représentés par ces matrices sont égaux, donc que ces matrices sont égales.

Donc $\mathcal{V}(X)$ et $(I_k - p_\sigma^t u)\text{Diag}(p_\sigma)$ sont semblables.

d) Soit j le nombre de i de $\llbracket 1; k \rrbracket$ pour lesquels on a $p_i \neq 0$.

Soit σ une permutation de $\llbracket 1; k \rrbracket$ telle que :

$$\forall i \leq j, p_{\sigma(i)} \neq 0, \quad \text{et} \quad \forall i > j, p_{\sigma(i)} = 0.$$

Le même raisonnement qu'en 3.b) montre que :

$$\text{rg}((I_k - p_\sigma^t u)\text{Diag}(p_\sigma)) = j - 1.$$

Et par 3.c), $\text{rg}(\mathcal{V}(X)) = j - 1 = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1; k \rrbracket / p_i \neq 0\}) - 1.$

MATHS 2 2014 - D'APRÈS PARTIE I

Lois généralisées de Bernoulli, version concrète

4. En notant n_i le nombre de boules de couleur C_i , et $N = \sum_{i=1}^k n_i$ le nombre total de

$$\text{boule} : \sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i = 1.$$

5. a) $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) = \emptyset$, donc
 $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = 0 \neq p_1 p_2 = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)$ Les variables $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$
ne sont pas indépendantes. On peut aussi remarquer que : $X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = 0...$

b) $\sum_{i=1}^k X_i = 1.$

6. a) $X_1 \leftrightarrow \mathcal{B}(p_1).$ b) $\mathcal{E}(X) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}.$

7. a) $X_1 + X_2 \leftrightarrow \mathcal{B}(p_1 + p_2)$ car $X_1 + X_2$ est la variable indicatrice de l'événement de probabilité $p_1 + p_2$: « la boule tirée est de couleur C_1 ou C_2 ».

b) $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)) = \frac{1}{2}((p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)) = -p_1 p_2.$

c) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; k \rrbracket, (\mathcal{V}(X))_{i,j} = \begin{cases} p_i - p_i^2 & \text{si } j = i, \\ -p_i p_j & \text{si } j \neq i. \end{cases}$

On peut aussi, avec les notations introduites partie I, écrire :

$$\mathcal{V}(X) = (I_k - p^t u)\text{Diag}(p).$$

8. a) Les $k - j$ dernières lignes de $\mathcal{V}(X)$ étant nulles, $\text{rg}(\mathcal{V}(X)) \leq j.$

b) On observe que, pour tout $(m, n) \in \llbracket 1; j \rrbracket^2,$

$$M_{m,n} = p_m, (I_j - M)_{m,n} = \begin{cases} 1 - p_m & \text{si } m = n, \\ -p_m & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

$$((I_j - M)\Delta)_{m,n} = \begin{cases} p_m - p_m^2 & \text{si } m = n \\ -p_m p_n & \text{si } m \neq n \end{cases} = (\mathcal{V}(X))_{m,n}$$

Ainsi $\mathcal{W} = (I_j - M)\Delta.$

9. a) $\forall (m, n) \in \llbracket 1; j \rrbracket^2, M_{m,n} = p_m,$ donc les j colonnes de M sont identiques, et non nulles, donc $\text{rg}(M) = 1.$

b) ${}^t u q = \langle u, q \rangle = \sum_{i=1}^j p_i = \sum_{i=1}^k p_i = 1$ (car $p_i = 0$ pour $i > j$), d'où :

$$M^2 = (q^t u)(q^t u) = q({}^t u q)^t u = q^t u = M : M \text{ est une matrice de projecteur.}$$

c) Puisque M représente un projecteur, $\text{SEP}(M, 1) = \text{Im}(M)$ et $\text{SEP}(M, 0) = \text{Ker}(M)$ donc $\dim(\text{SEP}(M, 1)) = 1$ et $\dim(\text{SEP}(M, 0)) = j - 1.$

d) $(I_j - M)^2 \stackrel{\text{commutent}}{=} I_j^2 - 2MI_j + M^2 \stackrel{M^2=M}{=} I_j - M : I_j - M$ est une matrice de projecteur.

e) $X \in \text{SEP}(I_j - M, 1) \Leftrightarrow (I_j - M - I_j)X = 0 \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow X \in \text{SEP}(M, 0).$ Donc $\text{SEP}(I_j - M, 1) = \text{SEP}(M, 0).$

f) Puisque $I_j - M$ représente un projecteur, $\text{SEP}(I_j - M, 1) = \text{Im}(I_j - M),$ donc $\text{rg}(I_j - M) = \dim(\text{SEP}(I_j - M, 1)) = \dim(\text{SEP}(M, 0)) = j - 1.$

10. a) Soit a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et $B.$ On a :
 $\text{Im}(a) = \text{Vect}(a(e_1), \dots, a(e_j))$ où $(e_1, \dots, e_j)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{j,1}(\mathbb{R}).$
De plus, $(b^{-1}(e_1), \dots, b^{-1}(e_j))$ est une base car b étant un automorphisme, il transforme une base en une base. Alors :
 $\text{Im}(a \circ b) = \text{Vect}(a \circ b(b^{-1}(e_1)), \dots, a \circ b(b^{-1}(e_j))) = \text{Vect}(a(e_1), \dots, a(e_j)).$
Ainsi : $\text{Im}(a) = \text{Im}(a \circ b),$ donc $\text{rg}(a) = \text{rg}(a \circ b),$ donc A et AB sont de même rang.

b) Δ étant inversible car ses coefficients diagonaux sont tous non nuls,

$$\text{rg}(\mathcal{W}) = \text{rg}(I_j - M) = j - 1.$$

Comme : $\mathcal{V}(X) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{W} & 0_{j,k-j} \\ \hline 0_{k-j,j} & 0_{k-j} \end{array} \right), \text{rg}(\mathcal{V}(X)) = j - 1.$