

Deux exercices extraits du sujet EDHEC 2013

EXERCICE 1.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée F , commune aux variables aléatoires X_k .
3. On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n . Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et de x .
4. a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a : $G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.
b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a : $x > \frac{1}{n}$.
En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n$.
5. a) Déterminer, pour tout réel x , la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.
b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G .
6. Vérifier que la variable aléatoire $\frac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

EXERCICE 2.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Pour finir, on désigne par id l'endomorphisme identité de E .

1. Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Im} f$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f .
2. Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer les valeurs propres de f .
- b) Montrer que $\text{Ker}(f - id)$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f .

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Le produit scalaire des vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f .

3. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :
 $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
4. a) Montrer que λ est une valeur propre de f^* .
b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ . Montrer que $(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f .