

Deux exercices extraits du sujet EDHEC 2013

EXERCICE 1.

1. • f est positive sur $\mathbb{R}$.
 • f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
 • f est paire, et pour tout $A \in [1; +\infty[$, $\int_0^A f(t)dt = \left[\frac{-1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Comme f est paire, j'en déduis que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $2 \times \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$.

f peut effectivement être considérée comme une fonction densité de probabilité.

2. En primitivant f , j'obtiens qu'il existe trois constantes k_1 , k_2 et k_3 telles que
 $F(x) = -1/2x + k_1$ pour $x \leq -1$, $F(x) = k_2$ pour $x \in]-1; 1[$ et $F(x) = -1/2x + k_3$ pour $x \geq 1$.
 De plus, F étant une fonction de répartition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, donc $k_1 = 0$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ donc $k_3 = 1$.

Enfin, la continuité de F en -1 entraîne $\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$, donc $\frac{1}{2} = k_2$.

$F(x) = -1/(2x)$ pour $x \leq -1$, $F(x) = 1/2$ pour $x \in]-1; 1[$ et $F(x) = 1 - 1/(2x)$ pour $x \geq 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Par indépendance des variables $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$.

$$G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(S_n \leq nx) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} [X_k \leq nx]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq nx).$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}. G_n(x) = (F(nx))^n = \begin{cases} (-1/(2nx))^n & \text{si } x \leq -1/n \\ 1/2^n & \text{si } x \in]-1/n; 1/n[\\ (1 - 1/(2nx))^n & \text{si } x \geq 1/n \end{cases}$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\infty; 0]$.

- Si $x \leq -1/n$, alors $G_n(x) = \left(\frac{-1}{2nx}\right)^n = \left(\frac{-1}{nx}\right)^n \times \frac{1}{2^n}$, et comme $0 \leq \frac{-1}{nx} \leq 1$, $G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.
- Si $x \in]-1/n; 0]$, alors $G_n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$

- b) Soit $x \in]0; +\infty[$. Appliquons la définition « epsilonïque » de la limite avec $\varepsilon = x$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ i.e. } \forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < x.$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < x.$$

Comme pour $x \geq 1/n$ on a : $G_n(x) = (1 - 1/(2nx))^n$, on a bien

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = (1 - 1/(2nx))^n.$$

5. a) • Pour $x \in]-\infty; 0]$, $0 \leq G_n(x) \leq 1/2^n$ entraîne par le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ existe et vaut 0.
 • Pour $x \in]0; +\infty[$ et par la question précédente, $\ln(G_n(x)) = n \ln(1 - 1/(2nx)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1/(2x)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ existe et vaut $\exp(-1/(2x))$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) \text{ existe et } G(x) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-1/(2x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- b) • G est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0 = G(0)$, donc G est continue en 0. Donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
 • G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $G'(x) = 0 \geq 0$ si $x \in]-\infty; 0]$ et $G'(x) = \frac{1}{2x^2} \exp\left(\frac{-1}{2x}\right) \geq 0$ si $x \in]0; +\infty[$. Donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-1/(2x)) = \exp(0) = 1$.

G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- c) Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = G(x) = F_Y(x)$, ce qui, par définition de la convergence en loi, entraîne :

la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable Y dont G est la fonction de répartition.

6. • Puisque G est nulle sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ (intervalle sur lequel $G' > 0$), on a $Y(\Omega) =]0; +\infty[$. Par conséquent, $y \mapsto 1/y$ étant une bijection de $]0; +\infty[$ sur lui-même, $\frac{1}{Y}(\Omega) =]0; +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
- (i) Si $x \leq 0$, alors $F_{1/Y}(x) = \mathbb{P}(1/Y \leq x) = 0$.
- (ii) Si $x > 0$, alors $F_{1/Y}(x) = \mathbb{P}(1/Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq 1/x) = 1 - F_Y(1/x) = 1 - G(1/x) = 1 - \exp(-x/2)$.
- Je reconnais en $F_{1/Y}$ la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

$\frac{1}{Y}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2.

1. Comme $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$, $\text{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
De plus, $\text{Im} f = \text{Vect}(f((0, 0, 1)), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 0, 0), (2, 3, 0)) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
Or $f((1, 0, 0)) = (0, 0, 0) \in \text{Im} f$ et $f((0, 1, 0)) = (1, 0, 0) \in \text{Im} f$. Donc $\text{Im} f$ est stable par f .
- $\text{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ stable par f .
2. a) • La somme des coefficients sur chaque ligne de M valant 4, on a $f((1, 1, 1)) = (4, 4, 4) = 4(1, 1, 1)$, donc 4 est une valeur propre de f .
- $\text{rg}(M - I_3) = 1$, donc 1 est une valeur propre de f et $\dim E_1 = 3 - 1 = 2$.
- Comme les sous-espaces sont en somme directe, il n'y a pas d'autre valeur propre puisque nous avons déjà $\dim E_4 + \dim E_1 \geq 3$. Nous pouvons même affirmer que $\dim E_4 = 1$ exactement.

Les valeurs propres de f sont 1 et 4.

On peut aussi déterminer $\text{rg}(M - \lambda I_3)$ par la méthode de Gauß pour trouver ces valeurs propres.

- b) $\text{Ker}(f - id) = E_1$ donc $\dim \text{Ker}(f - id) = 2$ et $\text{Ker}(f - id)$ est stable par f , comme tout sous-espace propre de f .

$\text{Ker}(f - id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ stable par f .

3. Remarque préliminaire : Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , nous pouvons utiliser :
- $\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$;
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = {}^tXY$ où $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ceci induit qu'il y a beaucoup de façons de répondre aux questions suivantes.
- a) Soit $(x, y) \in E^2$, $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle f(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX {}^tMY = {}^tX({}^tMY) = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

- b) Soit g un endomorphisme de E vérifiant aussi la propriété précédente. Alors, pour tout x de E ,

$$f^*(x) - g(x) = \sum_{k=1}^n \langle f^*(x), e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^n \langle g(x), e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^n \langle x, f(e_k) \rangle e_k - \sum_{k=1}^n \langle x, f(e_k) \rangle e_k = 0.$$

$$f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

f^* s'appelle l'endomorphisme adjoint de f , notion hors programme.

4. a) Toujours en notant M la matrice représentant f dans $\mathcal{B}$, on a :
- $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \text{rg}(M - \lambda I_n) < n \Rightarrow \text{rg}({}^t(M - \lambda I_n)) < n \Rightarrow \text{rg}({}^tM - \lambda I_n) < n \Rightarrow \text{rg}(f^* - \lambda id) < n \Rightarrow \lambda \in \text{Sp}(f^*)$.

λ est une valeur propre de f^* .

- b) • Comme $u \neq 0$, $\dim(\text{Vect}(u)) = 1$ et $\dim((\text{Vect}(u))^\perp) = \dim E - \dim(\text{Vect}(u)) = n - 1$.
- Soit $v \in (\text{Vect}(u))^\perp$. On a :
- $\langle f(v), u \rangle = \langle v, f^*(u) \rangle = \langle v, \lambda u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$,
- donc $f(v) \in (\text{Vect}(u))^\perp$.

$(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E stable par f .