EXERCICE 1.

1. *Un calcul préliminaire*

a) Justifier que l'intégrale doublement impropre définie par

$$I \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$$

converge.

b) Dans cette question, calculer la valeur de I de deux façons :i. à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$,ii. à l'aide du changement de variable $t = (\tan u)^2$.2. *Définition*

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)}$$

converge si, et seulement si, $x \in]0; 1[$.Dans toute cette partie, on étudie la fonction g définie sur $]0; 1[$ par

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)}.$$

3. *Symétrie*a) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que : $\forall x \in]0; 1[, \quad g(1-x) = g(x)$.b) En déduire un axe de symétrie de la courbe représentative de g .4. *Équivalents de g en 0 et en 1*Dans cette question, x désigne un réel de l'intervalle $]0; 1/2]$.a) Vérifier que : $g(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(t+1)}$.b) Montrer que : $0 \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.c) Montrer que : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(t+1)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.d) En déduire que : $\left| g(x) - \frac{1}{x} \right| \leq 3$.

e) En déduire finalement

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

f) À l'aide de 3.b), en déduire un équivalent de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.5. *Variations de g* a) Soit x dans $]0; 1[$. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)}$, montrer que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x + t^{1-x}}{t(t+1)} dt.$$

b) Soit $t \in]1; +\infty[$ fixé, et h la fonction définie par

$$h :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto t^x + t^{1-x}.$$

Vérifier que, pour tout x de $]0; 1[$,

$$h'(x) = \ln(t)(t^x - t^{1-x}).$$

c) En déduire les variations de h , puis celles de g .6. *Extremums*a) Justifier que le minimum de g est π , en précisant le point où il est atteint.b) g est-elle majorée ?7. *Courbe*On admet que g est dérivable. Tracer l'allure de la courbe représentative de g en faisant apparaître tous les éléments rencontrés dans cette étude.

EXERCICE 2.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \int_0^1 t^n e^{xt} dt.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note G_n la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto x^n e^x$ s'annulant en 0. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt.$$

Les deux parties sont indépendantes et doivent être traitées comme telles.

Autrement dit, *il est interdit* d'utiliser dans une partie un résultat obtenu dans l'autre partie.

Les résultats préliminaires peuvent être utilisés à tout instant.

PRÉLIMINAIRES.

8. Déterminer f_0 et vérifier que f_0 est continue sur $\mathbb{R}^+$.
9. a) Établir, pour tout u de $\mathbb{R}$, que $u + 1 \leq e^u$.
- b) Justifier alors que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} \leq G_n(x) \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
- c) Montrer enfin que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$.

Partie A. Étude de f_1 à l'aide d'un calcul explicite.

10. a) Calculer $f_1(0)$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $f_1(x)$ pour $x > 0$.
11. a) Quelle est la classe de dérivabilité de f_1 sur $\mathbb{R}^{*+}$?
- b) f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$? (On rappelle que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0.)
12. Déterminer un équivalent de $f_1(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B. Étude de f_n à l'aide de G_n .

Dans cette partie, n désigne un entier naturel quelconque.

13. a) Calculer $f_n(0)$.
- b) À l'aide du changement de variable $u = xt$, calculer, pour $x > 0$, $f_n(x)$ en fonction de $G_n(x)$.
14. a) Quelle est la classe de dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}^{*+}$?
- b) Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
15. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, G_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x - (n+1)G_n(x)$.
- b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$G_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^n e^x.$$

16. En déduire un équivalent de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Question d'initiative, indépendante des exercices

17. Soit f continue sur $[0, +\infty[$ et F sa primitive s'annulant en 0. On suppose :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq F(x).$$

On définit une fonction H par : $\forall x \geq 0, H(x) = e^{-x}F(x)$. En dérivant H , montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Question subsidiaire pour départager les ex-æquo

Qui a dit :

« Je parle. Il le faut bien. L'action met les ardeurs en œuvre. Mais c'est la parole qui les suscite. » ?