

EXERCICE 1.*Un calcul préliminaire***1.** *Un calcul préliminaire*

- a) • $j : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$.
- $j(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, puisque $1/2 < 1$.
 - $j(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, puisque $3/2 > 1$.

Le critère des équivalents pour les fonctions positives, appliqué en 0 et en $+\infty$ justifie que
l'intégrale doublement impropre I converge.

- b) i. $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc le changement de variable proposé est légitime. On obtient alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{2udu}{u(u^2+1)}$$

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = 2 \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A) - \arctan(0) \right) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

- ii. $t : u \mapsto \tan^2 u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0; \pi/2[$, donc le changement de variable proposé est légitime. On obtient alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \tan u (\tan^2 u + 1) du}{\tan u (\tan^2 u + 1)} = \int_0^{\pi/2} 2 du = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$I = \pi.$$

2. *Définition*

$t \mapsto \frac{1}{t^x(t+1)}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$.

$\frac{1}{t^x(t+1)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^x}$ converge si, et seulement si, $x < 1$. Par le critère des équivalents pour des fonctions positives, $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)}$ converge si, et seulement si, $x < 1$.

$\frac{1}{t^x(t+1)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ converge si, et seulement si, $x+1 > 1$ (i.e. $x > 0$). Par le critère des équivalents pour des fonctions positives, $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)}$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Par définition de la convergence d'une intégrale doublement impropre,

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)} \text{ converge si, et seulement si, } x \in]0; 1[.$$

3. *Symétrie*

- a) $u : t \mapsto 1/t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, le changement de variable indiqué est licite. Soit $x \in]0; 1[$.

$$g(x) \stackrel{u=1/t}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{(-1/u^2) du}{u^{-x}(1+1/u)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(u+1)} = g(1-x)$$

- b) Soit $M(x, y)$ un point quelconque. Son symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 1/2$ est $M'(1-x, y)$ (Faire un dessin pour s'en convaincre!) On a alors :

$$M \in \mathcal{C}_g \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = g(1-x) \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}_g.$$

La droite verticale d'équation $x = 1/2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_g$.

4. *Équivalents de g en 0 et en 1*

Dans cette question, x désigne un réel de l'intervalle $]0; 1/2]$.

- a) En coupant par la relation de Chasles en 1 et par linéarité sur $[1; +\infty[$,

$$g(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{t - (t+1)}{t^{x+1}(t+1)} dt, \text{ d'où}$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(t+1)}.$$

b) $\forall t \in]0; 1], 0 \leq \frac{1}{t^x(t+1)} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ car $0 < x \leq \frac{1}{2}$ entraîne $t^x \geq t$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

c) $\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{1}{t^x(t+1)} \leq \frac{1}{t^{x+2}} \leq \frac{1}{t^2}$ car $0 < x$ entraîne $t^{x+2} \geq t^x$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(t+1)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

d) Commençons par calculer les deux intégrales majorantes :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{A \rightarrow 0} \left[2\sqrt{t} \right]_A^1 = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{t} \right]_1^A = 1$$

$$\text{Observons que : } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-xt^x} \right]_1^A = \frac{1}{x}$$

L'inégalité triangulaire dans 11.a) donne :

$$\left| g(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \right| \leq \left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} \right| + \left| \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(t+1)} \right|$$

Et en remplaçant les intégrales par leur valeur,

$$\left| g(x) - \frac{1}{x} \right| \leq 3.$$

e) En divisant l'inégalité par $1/x$ pour $x > 0$, on a :

$$\forall x \in]0; 1/2], \quad 0 \leq \left| \frac{g(x)}{1/x} - 1 \right| \leq 3x.$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$, par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1/x} = 1$, autrement dit

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

f) En utilisant la symétrie de 3.b), $\frac{g(x)}{1/(1-x)} = \frac{g(1-x)}{1/(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ d'après 11.e).

$$g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

5. Variations de g

a) Soit x dans $]0; 1[$.

Le changement de variable est identique à celui pratiqué en 10.a) et donne $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(t+1)} \stackrel{u=1/t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(u+1)} =$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{t(t+1)} dt.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{t^{1-x}}{t(t+1)} dt$, par la relation de Chasles :

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{t(t+1)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{1-x}}{t(t+1)} dt, \text{ et par linéarité :}$$

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x + t^{1-x}}{t(t+1)} dt.$$

b) En écrivant : $\forall x \in]0; 1[, h(x) = e^{x \ln t} + e^{(1-x) \ln t}$, on a immédiatement

$$\forall x \in]0; 1[, h'(x) = \ln(t) e^{x \ln t} - \ln(t) e^{(1-x) \ln t} = \ln(t)(t^x - t^{1-x}).$$

Comme $t > 1$, $\ln(t) > 0$ et $h'(x)$ est du signe de $t^x - t^{1-x}$. Ainsi :

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow t^x > t^{1-x} \Leftrightarrow x \ln(t) > (1-x) \ln(t) \text{ par stricte croissance de exp,}$$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 - x \Leftrightarrow x > 1/2$ (toujours puisque $\ln(t) > 0$).

De même, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$.

h est strictement décroissante sur $]0; 1/2]$ et strictement croissante sur $[1/2; 1[$.

c) Soit $0 < x < y \leq 1/2$. Par la décroissance de $h : \forall t > 1, t^x + t^{1-x} \geq t^y + t^{1-y}$, donc : $\forall t > 1, \frac{t^x + t^{1-x}}{t(t+1)} >$

$\frac{t^y + t^{1-y}}{t(t+1)}$. Par croissance de l'intégrale et puisque l'inégalité est stricte et les fonctions intégrées sont continues, $g(x) > g(y)$. g est strictement décroissante sur $]0; 1/2]$. On démontre de même que g est strictement croissante sur $[1/2; 1[$. g est strictement décroissante sur $]0; 1/2]$ et strictement croissante sur $[1/2; 1[$.

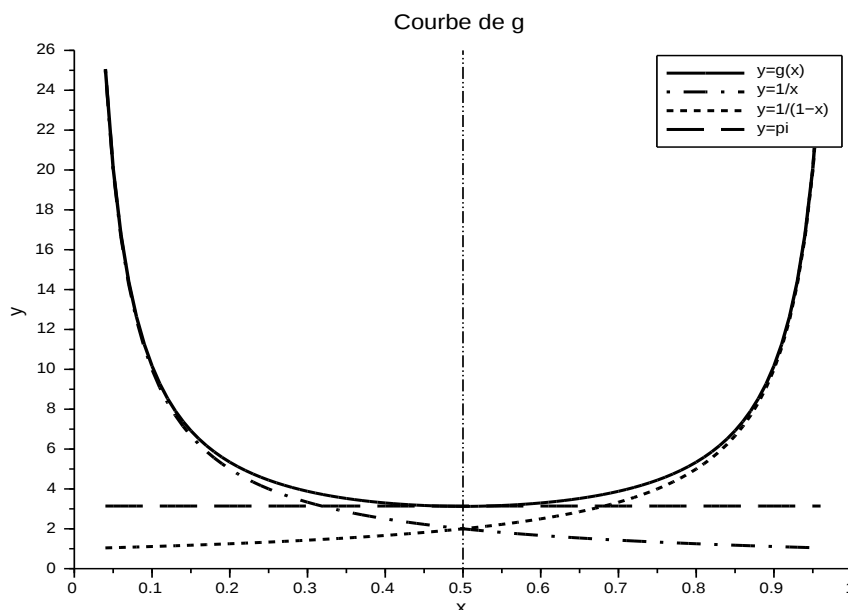
6. Extremums

a) Les variations de g induisent qu'elle atteint un minimum en $1/2$, et uniquement en $1/2$. Or $g(1/2) = I = \pi$.

Le minimum de g est π , atteint uniquement en $1/2$.

b) $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ induit $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$, donc g n'est pas majorée.

7. Courbe



```
function y=g(x)
    if x>.5 then
        y=integrate('(t^x*(t+1))^(-1)', 't', 0, 10000)
    else
        y=integrate('(t^(1-x)*(t+1))^(-1)', 't', 0, 10000)
    end;
endfunction;
```

```
x=.04:.01:.96;y=[];for k=x y=[y g(k)];end;
plot2d(x,y);plot2d(x,x^(-1));plot2d(x,(1-x)^(-1));plot2d(x,%pi+0.*x);
xpoly([.5 .5],[0,30]);xtitle('Courbe de g');
legend('y=g(x)', 'y=1/x', 'y=1/(1-x)', 'y=pi');
```

EXERCICE 2.

PRÉLIMINAIRES.

8. $f_0(0) = \int_0^1 1 dt = 1$ et pour $x > 0$, $f_0(x) = \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{e^x - 1}{x}$.

f_0 est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues au dénominateur ne s'annulant pas et l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ montre que $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 1 = f_0(0)$. Donc f_0 est de continue sur $\mathbb{R}^+$.

9. a) L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et $y = x + 1$ est l'équation de la tangente à sa courbe en 0. Cette tangente étant située sous la courbe par convexité, $\boxed{\text{pour tout } u \text{ de } \mathbb{R}, \text{ que } u + 1 \leq e^u.}$
- b) Pour tout u de $[0; x]$, il découle de l'inégalité précédente $u^{n+1} + u^n \leq u^n e^u \leq x^n e^x$. En intégrant sur $[0; x]$, on obtient par croissance de l'intégrale, $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} \leq G_n(x) \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$
- c) Pour $x > 0$, l'encadrement précédent peut s'écrire $\frac{1}{n+1} + \frac{x}{n+2} \leq \frac{G_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{e^x}{n+1}$. Minorant et majorant tendant vers $\frac{1}{n+1}$ lorsque x tend vers 0, le théorème des gendarmes (ou de l'encadrement) permet de conclure $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.}$

A-ÉTUDE DE f_1 À L'AIDE D'UN CALCUL EXPLICITE.

10. a) $\boxed{f_1(0) = \frac{1}{2}.}$
- b) À l'aide d'une intégration par parties, $\boxed{f_1(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \text{ pour } x > 0.}$
11. $\boxed{f_1 \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^{*+}}$ et le développement limité fourni permet d'établir que $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \frac{1}{2} = f_1(0)$, donc $\boxed{f_1 \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}.$
12. Pour $x > 0$, $\frac{f_1(x)}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\frac{e^x - e^x + 1}{x^2}}{\frac{e^x}{x}} = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi $\boxed{f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.}$

B-ÉTUDE DE f_n À L'AIDE DE G_n .

13. a) $\boxed{f_n(0) = \frac{1}{n+1}.}$ b) Par l'aide du changement de variable $u = xt$, les bornes de l'intégrale deviennent 0 et x , $du = xdt$ et ainsi, $\boxed{\text{pour } x > 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{u^n}{x^n} e^u \frac{1}{x} du = \frac{G_n(x)}{x^{n+1}}.}$
14. a) G_n étant une primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, G_n est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Le dénominateur de f_n étant lui aussi $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulant sur $\mathbb{R}^{*+}$, $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^{*+}.}$
- b) Ainsi f_n est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$. D'après le préliminaire et II1a), $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} = f_n(0)$ donc $\boxed{f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}.$
15. a) Une intégration par parties donne $G_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x - (n+1)G_n(x)$.
- b) On peut alors montrer $G_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^n e^x$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n .
- $G_0(x) = e^x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
 - Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n . On a $G_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x - n + 1G_n(x)$ avec $n + 1G_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)x^n e^x$. Or $(n+1)x^n e^x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^{n+1}e^x)$ donc $x^{n+1}e^x - n + 1G_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{n+1}e^x$. Ainsi $G_{n+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{n+1}e^x$: la propriété est héréditaire.
 - Par récurrence sur n , voici démontré $\boxed{G_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^n e^x.}$
16. Alors par 13.b) $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.}$

Question d'initiative, indépendante des exercices

17. H est dérivable comme produit de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}^+, H'(x) = e^{-x}(f(x) - F(x)) \leq 0$. H est décroissante et $H(0) = 0$ donc H est négative. Mais comme $F \geq 0$ et $\exp \geq 0$, H est positive. Donc H est nulle.
- Or $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^{-x} \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = 0$. Et comme $f = F'$, f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.
- Question subsidiaire : le général Charles DE GAULLE.