Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Veuillez encadrer les réponses finales à chaque question.

---

# Exercice 1.

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $f$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note $id_{\mathrm{E}}$ l'endomorphisme identité de E, défini par $id_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, t \mapsto t$.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 1)$ et $w = (-2, 2, -1)$, et

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note enfin $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de E dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 :

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \forall i \in [\![1\,;\,3]\!], \sum_{j=1}^{3} a_{i,j} = 1 \right\}.$$

*Les 6 questions sont largement indépendantes.*

**1.** **a)** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Que vaut $f(x, y, z)$ ?

**b)** $f$ est-il un automorphisme de E ? Justifier la réponse.

**2.** Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v, w)$

**a)** Montrer que F et G sont stables par $f$.

**b)** Montrer que F et G sont supplémentaires.

**3.** **a)** $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? M appartient-elle à $\mathcal{S}$ ? Et D ?

**b)** Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$.

**c)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{M}^n$ appartient à $\mathcal{S}$.

**4.** **a)** Soit $g$ l'endomorphisme de E défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}, \quad g(x, y, z) = (z, z, z)$.
Justifier que $\mathcal{D} = (e_1, e_2, u)$ est une base de E, et donner la matrice représentant $g$ dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice représentant $g$ dans la base $\mathcal{D} = (e_1, e_2, u)$.

**b)** Est-il vrai que : si $\mathrm{A} \in \mathcal{S}$ et B est semblable à A, alors $\mathrm{B} \in \mathcal{S}$ ? Justifier la réponse.

**5.** **a)** Justifier que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de E et écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. On note P cette matrice.

**b)** Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

**c)** Justifier que la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{C}$ est D.

**d)** Calculer $\mathrm{D}^n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**e)** En déduire $\mathrm{M}^n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**6.** **a)** Calculer $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)^2$. Que peut-on dire de l'endomorphisme $(f - id_{\mathrm{E}}) \circ (f - id_{\mathrm{E}})$ ?

**b)** Soit $t$ un vecteur non nul et $\lambda$ un réel tels que $f(t) = \lambda t$.
En appliquant $(f - id_{\mathrm{E}}) \circ (f - id_{\mathrm{E}})$ à $t$, montrer que $\lambda = 1$.

**c)** En déduire qu'il n'existe aucune base de E dans laquelle la matrice représentative de $f$ est diagonale.

# Exercice 2.

Dans cet exercice $n$ désigne un entier naturel non nul.

On dispose de deux jeux **identiques** de $n$ cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.

Chacun de ces jeux est composé de $n$ figurines représentant des animaux différents.

On mélange les deux jeux dans une urne.

À chaque tour on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes, on ne remet pas les deux cartes dans l'urne, sinon on les remet dans l'urne.

Soit $\mathrm{T}_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tours qui ont été nécessaires pour vider l'urne, en reconstituant ainsi les $n$ paires de figurines d'animaux.

**7.** Déterminer la loi et l'espérance de la variable $\mathrm{T}_1$.

**8.** Déterminer $\mathrm{T}_n(\Omega)$ pour $n$ supérieur ou égal à 2.

**9.** Pour $i \geqslant 1$, on définit les événements $\mathrm{C}_i$ par "lors du $i$-ième tour, une paire d'animaux est reconstituée".

**a)** Justifier que le nombre résultats possibles du premier tirage est $\binom{2n}{2}$ et en déduire que : $\mathbb{P}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{1}{2n-1}$.

**b)** En utilisant les événements $\mathrm{C}_i$, montrer que pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

**c)** Montrer que $\mathrm{T}_2$ admet une espérance et la calculer.

**10.** On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul $n, \mathrm{T}_n$ admet une espérance.

**a)** Justifier que, pour tout $k$ de $\mathrm{T}_n(\Omega)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{T}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_{n-1} = k-1)$.

**b)** En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\mathrm{C}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + 1$, puis que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\overline{\mathrm{C}_1}) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) + 1$.

**c)** En déduire finalement que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2,

$$\mathbb{E}(\,\mathrm{T}_n\,) = \mathbb{E}(\,\mathrm{T}_{n-1}\,) + 2n - 1.$$

**11.** **a)** Écrire en Scilab une fonction prenant comme argument l'entier naturel $n$ et calculant $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$.

**b)** Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{T}_3)$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{T}_4)$.

En déduire pour tout entier naturel non nul $n$ une expression de $\mathbb{E}(\,\mathrm{T}_n\,)$ en fonction de $n$ (Justifier cette expression).

# Exercice 3.

Monsieur M. achète des images de la collection *Mathématiciens du monde* pour remplir son album. La collection compte $n$ images ($n \geqslant 2$) et chaque image est emballée dans une enveloppe opaque. On considère que chaque enveloppe contient une image au hasard parmi les $n$, et que les contenus des enveloppes sont indépendants les uns des autres.

**Partie I : Un résultat d'analyse**

**12.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**a)** Écrire une fonction `un` en Scilab prenant $n$ comme argument et calculant $u_n$.

**b)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

**c)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - \ln n$ et $w_n = v_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite, notée $\gamma$.

**d)** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(\ln n + \gamma) \leqslant nu_n \leqslant n(\ln n + \gamma) + 1$.

Dans la suite du problème, on admet que la constante (1) $\gamma$ vaut $0,577$ à $10^{-3}$ près.

(1). Cette constante porte le nom de *constante gamma d'Euler* et $\gamma \simeq 0,577215664902...$

**Partie II : Réalisation d'une collection complète**

On note $\mathrm{T}_n$ la variable égale au nombre d'achats nécessaires pour obtenir la collection complète. Pour $k \geqslant 1$, on note $\mathrm{Y}_k$ le nombre d'achat(s) nécessaire(s) à l'obtention d'une $k^{\text{ème}}$ carte lorsqu'on possède déjà $k-1$ cartes distinctes, de sorte que $\mathrm{T}_n = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{Y}_n$.

**13. a)** Justifier que $\mathrm{Y}_k$ suit une loi géométrique, et préciser son espérance.

**b)** En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = nu_n$.

**14.** À l'aide de la première partie, donner une valeur approchée de $\mathbb{E}(\mathrm{T}_{100})$. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$ *à* $10^{-3}$ *près.*

**Partie III : Étude d'une collection inachevée**

On s'intéresse maintenant à la réalisation d'une collection incomplète. Pour $k$ dans $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{X}_k$ le nombre d'images distinctes à l'issue du $k^{\text{ème}}$ achat, en convenant évidemment que $\mathrm{X}_0 = 0$.

**15.** Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables $\mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}_2$.

**16.** *Espérance de* $\mathrm{X}_k$.
Soit $k \geqslant 1$.

**a)** Justifier que $\mathrm{X}_k(\Omega) = [\![1\,;\,\min(k,n)]\!]$.

**b)** Soit $j \in \mathrm{X}_k(\Omega)$. Montrer que : $\begin{cases} \mathbb{P}_{[\mathrm{X}_k=j]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \dfrac{j}{n}, \\ \mathbb{P}_{[\mathrm{X}_k=j]}(\mathrm{X}_{k+1} = j+1) = \dfrac{n-j}{n}. \end{cases}$

**c)** En déduire que, pour $j \in \mathrm{X}_k(\Omega)$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1} | [\mathrm{X}_k = j]) = 1 + \dfrac{n-1}{n} j$.

**d)** Établir que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)$.

**e)** Cette relation est-elle encore vérifiée si $k = 0$ ?

**f)** En remarquant que $(\mathbb{E}(\mathrm{X}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique, montrer que, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

**g)** Que vaut $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)$ ? Qu'en pensez-vous ?

**17.** *Éléments de la loi de* $\mathrm{X}_k$.

**a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1)$.

**b)** Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

**c)** Établir que, pour tout $j$ de $\mathrm{X}_{k+1}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \frac{j}{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = j) + \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = j-1).$$

**d)** En déduire que, pour tout $k$ de $[\![1\,;\,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = k-1) = \frac{(n-1)!k(k-1)}{2(n-k+1)!n^{k-1}}.$$