EXERCICE 1.

1. **a)** $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}, \quad f(x,y,z) = (5x+2y-6z, -2x+3z, 2x+y-2z)$

b) On peut montrer que $\mathrm{rg(M)} = 3$, donc M est inversible et f est un automorphisme de E. On peut aussi montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et rappeler que E est de dimension finie.

2. **a)** $f(u) = u$, $f(v) = v$ et $f(w) = e_2 = v + w$.
Soit $t \in \mathrm{F}$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}, t = \alpha u$. Alors $f(t) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha u \in \mathrm{F}$.
Soit $t \in \mathrm{G}$. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, t = \alpha v + \beta w$. Alors $f(t) = f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = (\alpha+\beta)v + \beta w \in \mathrm{G}$.
Donc F et G sont stables par f.

b) On montre que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, donc (u,v,w), obtenue en concaténant la base (u) de F et la base (v,w) de G, est une famille libre de trois vecteurs de E, lui-même de dimension 3. C'est une base de E. Donc $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

3. **a)** $\mathcal{S}$ ne contient pas la matrice nulle, donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$\mathrm{M} \in \mathcal{S}$ et $\mathrm{D} \notin \mathcal{S}$.

b) En calculant AU : $\mathrm{AU} = \mathrm{U} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_j a_{1,j} \\ \sum_j a_{2,j} \\ \sum_j a_{3,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathcal{S}$.

c)
- $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3 \in \mathcal{S}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{M}^n \in \mathcal{S}$.
$\mathrm{M}^{n+1}\mathrm{U} = \mathrm{M}.\mathrm{M}^n\mathrm{U} = \mathrm{MU}$ car $\mathrm{M}^n \in \mathcal{S}$. Or $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$. Donc $\mathrm{M}^{n+1}\mathrm{U} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{M}^{n+1} \in \mathcal{S}$.
- Par récurrence, pour tout entier naturel n, M^n appartient à $\mathcal{S}$.

4. **a)** On vérifie sans problème que $\mathcal{D}$ est une famille libre de 3 vecteurs de E, donc une base puisque $\dim(\mathrm{E}) = 3$.

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) L'affirmation est fausse : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g)$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(g)$ sont semblables car elles représentent un même endomorphisme mais $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{S}$ tandis que $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(g) \notin \mathcal{S}$.

5. **a)** Par 2.c), $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de E. $\mathrm{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1} = \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Par la formule de changement de base : $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou en utilisant $f(u) = u$, $f(v) = v$ et $f(w) = e_2 = v + w$.

d) Par récurrence ou en écrivant $\mathrm{D} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$ avec I_3 et N qui commutent pour utiliser la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2n+3 & n+1 & -3n-4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n+1 & 2n & -6n \\ -2n & -n+1 & 3n \\ 2n & n & -3n+1 \end{pmatrix}$$

6. **a)** $(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)^2 = 0$, or $(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)^2$ représente l'endomorphisme $(f - id_{\mathrm{E}})^2 = (f - id_{\mathrm{E}}) \circ (f - id_{\mathrm{E}})$ dans $\mathcal{B}$, donc cet endomorphisme est l'endomorphisme nul.

b) Appliquons $(f - id_{\mathrm{E}}) \circ (f - id_{\mathrm{E}})$ à t :
$(f - id_{\mathrm{E}})(t) = (\lambda t - t) = (\lambda - 1)t$, puis
$(f - id_{\mathrm{E}})\big((f - id_{\mathrm{E}})(t)\big) = (\lambda - 1)(f - id_{\mathrm{E}})(t) = (\lambda - 1)^2 t$.
Mais comme cet endomorphisme est nul, $(\lambda - 1)^2 t = 0$.
Et comme $t \neq 0$, $\lambda = 1$.

c) Si dans la base $\mathcal{D} = (f_1, f_2, f_3)$ la matrice représentative de f est la matrice diagonale $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$, alors $f(f_1) = \lambda_1 f_1$, $f(f_2) = \lambda_2 f_2$ et $f(f_3) = \lambda_3 f_3$. Et par b), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, donc $\Delta = \mathrm{I}_3$.
Alors $\mathrm{M} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \Delta \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \mathrm{I}_3 \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1} = \mathrm{I}_3$, ce qui est absurde.

EXERCICE 2.

7. Si $n = 1$, il n'y a qu'une paire de cartes et l'urne est vidée dès le premier tirage : T_1 est la variable constante égale 1, $\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 = 1) = 1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{T}_1) = 1$.

8. $\mathrm{T}_n(\Omega) = [[n, +\infty[[$.

9. **a)** Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir 2 cartes parmi $2n$, dont n façons de choisir exactement une paire (puisqu'il y a n paires), d'où $\mathbb{P}(\mathrm{C}_1) = \dfrac{n}{\binom{2n}{2}} = \cdots = \dfrac{1}{2n-1}$.

b) $[\mathrm{T}_2 = k] = \overline{\mathrm{C}_1} \cap \overline{\mathrm{C}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{C}_{k-2}} \cap \mathrm{C}_{k-1} \cap \mathrm{C}_k$
Par la formule des probabilités composées :
$\mathbb{P}(\mathrm{T}_2 = k) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{C}_1})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{C}_1}}(\overline{\mathrm{C}_2}) \ldots \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{C}_1} \cap \overline{\mathrm{C}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{C}_{k-2}}}(\mathrm{C}_{k-1})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{C}_1} \cap \overline{\mathrm{C}_2} \cap \cdots \cap \mathrm{C}_{k-1}}(\mathrm{C}_k) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times 1$
$\mathbb{P}(\mathrm{T}_2 = k) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} k \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ est la somme partielle d'une série géométrique absolument convergente car $|2/3| \leqslant 1$, donc T_2 admet une espérance.
$\mathbb{E}(\mathrm{T}_2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(1-2/3)^2} - 1\right) = 2$

10. On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul n, T_n admet une espérance, ce qui entraîne l'existence de toutes les espérances conditionnelles liées à T_n.

a) Sachant C_1, pour avoir $[\mathrm{T}_n = k]$, il faut et il suffit de reconstituer les $n-1$ paires restantes en exactement $k-1$ tirages, ce qui a une probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{T}_{n-1} = k-1)$ d'arriver. Pour tout k de $\mathrm{T}_n(\Omega)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{T}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_{n-1} = k-1)$.

b) $\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\mathrm{C}_1) = \sum_{k \in \mathrm{T}_n(\Omega)} k\mathbb{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{T}_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{T}_{n-1} = k-1) = \sum_{j=n-1}^{+\infty} (j+1)\mathbb{P}(\mathrm{T}_{n-1} = j) \overset{\text{transf.}}{=}$ $\mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1} + 1) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + 1$
Un raisonnement analogue au précédent, pour tout k de $\mathrm{T}_n(\Omega)$, $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{C}_1}}(\mathrm{T}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k-1)$.
$\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\overline{\mathrm{C}_1}) = \sum_{k \in \mathrm{T}_n(\Omega)} k\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{C}_1}}(\mathrm{T}_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k-1) = \sum_{j=n-1}^{+\infty} (j+1)\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = j) \overset{\text{transf.}}{=} \mathbb{E}(\mathrm{T}_n + 1) =$ $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) + 1$

c) Appliquons la formule de l'espérance totale avec le système complet $(\mathrm{C}_1, \overline{\mathrm{C}_1})$:
$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_1)\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\mathrm{C}_1) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{C}_1})\mathbb{E}(\mathrm{T}_n|\overline{\mathrm{C}_1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_1)\mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{C}_1})\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) + 1$
D'où : $\mathbb{P}(\mathrm{C}_1)\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_1)\mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + 1$, donc $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + \dfrac{1}{\mathbb{P}(\mathrm{C}_1)} = \mathbb{E}(\mathrm{T}_{n-1}) + 2n - 1$.

11. a)

```
function e=esper(n)
    e=1
    for k=2:n
        e=e+2*k-1
    end
endfunction
```

b) $\mathbb{E}(\mathrm{T}_1) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathrm{T}_2) = 1+2\times2-1 = 4 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathrm{T}_3) = 4+2\times3-1 = 9 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathrm{T}_4) = 9+2\times4-1 = 16\ldots$
On peut conjecturer, puis montrer par récurrence, que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = n^2.$$

$\boxed{\text{Exercice 3.}}$ *Le problème du collectionneur.*

12. a)

```
function u=un(n:integer)
    u=0
    for k=1:n
        u=u+1/k
    end
endfunction
```

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$ s'établit par l'inégalité des accroissements finis appliquée à ln entre $[\![n\,;\,n+1]\!]$, ou encore en écrivant $\ln(n+1) - \ln(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et en utilisant la croissance de l'intégrale.

c) L'inégalité précédente permet d'établir que v est décroissante, w croissante.
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$, v et w sont adjacentes, donc converge vers une même limite γ.

d) D'après ce qui précède, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$, donc $u_n - \ln n - \dfrac{1}{n} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \ln n$, soit, en isolant u_n, $\ln n + \gamma \leqslant u_n \leqslant \ln n + \gamma + \dfrac{1}{n}$. En multipliant par n, $n(\ln n + \gamma) \leqslant nu_n \leqslant n(\ln n + \gamma) + 1$.

Réalisation d'une collection complète.

13. a) $\mathrm{Y}_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) \overset{\text{lin.}}{=} \dfrac{n}{n-k+1}$.

b) $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) \overset{\text{lin.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = nu_n$ où j'ai posé $j = n-k+1$.

14. a) Pour $n = 100$, $n(\ln n + \gamma) \simeq 100 \times (2\ln 10 + 0,577) \simeq 518,3$. Il découle de la première question que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_{100}) \simeq 519$ (une valeur entière est la bienvenue, non ?).

Étude d'une collection inachevée.

15. • X_1 est la variable constante égale à 1, d'espérance 1 et de variance nulle.

• $X_2(\Omega)=\{1;2\}$, $\mathbb{P}(X_2=1)=\dfrac{1}{n}$ (probabilité de tirer la même carte au second tirage qu'au premier), $\mathbb{P}(X_2=2)=\dfrac{n-1}{n}=1-\dfrac{1}{n}$. Alors $\mathbb{E}(X_2)=\dfrac{1}{n}+2\big(1-\dfrac{1}{n}\big)=2-\dfrac{1}{n}$, $\mathbb{E}(X_2^2)=\dfrac{1}{n}+4\big(1-\dfrac{1}{n}\big)=4-\dfrac{3}{n}$, $\mathbb{V}(X_2)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n^2}$.

16. a) Il est déraisonnable d'avoir plus d'images que d'achats, et plus d'images que le nombre total de la collection, ainsi $X_k(\Omega)=[\![1\,;\,\min(k,n)]\!]$.

b) Si $X_k=j$, on a j chances sur n d'avoir à nouveau l'une de ces j images au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage, et $n-j$ chances d'en obtenir une différente, donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=j)=\dfrac{j}{n}$ et $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=j+1)=\dfrac{n-j}{n}$.

c) $\mathbb{E}(X_{k+1}|[X_k=j])=j\times\dfrac{j}{n}+(j+1)\times\dfrac{n-j}{n}=\dfrac{j^2+jn+n-j^2-j}{n}=1+\dfrac{n-1}{n}j$.

d) Par la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $(X_k=j)_{j\in X_k(\Omega)}$, on obtient :

$$\mathbb{E}(X_{k+1})\overset{\text{FET}}{=}\sum_{k\in X_k(\Omega)}(1+\frac{n-1}{n}j)\mathbb{P}(X_k=j)\overset{\text{transf.}}{=}\mathbb{E}\left(1+\frac{n-1}{n}X_k\right)=1+\frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_k).$$

e) Comme $\mathbb{E}(X_0)=0$ et $\mathbb{E}(X_1)=1$, cette relation est encore vérifiée si $k=0$.

f) Comme $x=1+\dfrac{n-1}{n}x\iff x=n$, la suite $(\mathbb{E}(X_k)-n)$ est géométrique de raison $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, pour tout $k\geqslant 0$, $\mathbb{E}(X_k)=n-n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$.

g) $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbb{E}(X_k)=n$ puisque $0<1-\dfrac{1}{n}<1$... on peut espérer une collection complète avec un grand nombre d'achats.

17. a) $\mathbb{P}(X_1=1)=1$, et pour $k\geqslant 2$:

$\mathbb{P}(X_k=1)=\mathbb{P}([X_1=1]\cap\cdots\cap[X_k=1])$

$\mathbb{P}(X_k=1)\overset{\text{FPC}}{=}\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2=1)\ldots\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=1]}(X_k=1)$

$\mathbb{P}(X_k=1)=1\times\left(\dfrac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_k=1)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

b) Pour $1\leqslant k\leqslant n$,

$\mathbb{P}(X_k=k)=\mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=2]\cap\cdots\cap[X_k=k])$

$\overset{\text{FPC}}{=}\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2=2)\ldots\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=k-1]}(X_k=k)$,

$\mathbb{P}(X_k=k)=1\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n}\times\cdots\times\dfrac{n-k+1}{n}=\dfrac{n!}{n^k(n-k)!}=\dfrac{(n-1)!}{n^{k-1}(n-k)!}$.

c) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_k=i)_{i\in X_k(\Omega)}$,

$\mathbb{P}(X_{k+1}=j)=\displaystyle\sum_{i\in X_k(\Omega)}\mathbb{P}_{[X_k]=i}(X_{k+1}=j)\mathbb{P}(X_k=i)$

$=\mathbb{P}_{[X_k]=j-1}(X_{k+1}=j)\mathbb{P}(X_k=j-1)+\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=j)\mathbb{P}(X_k=j)$ car toutes les autres probabilités conditionnelles sont nulles,

$\mathbb{P}(X_{k+1}=j)=\dfrac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(X_k=j-1)+\dfrac{j}{n}\mathbb{P}(X_k=j)$ d'après 2b).

d) Une récurrence sur k dans $[\![1\,;\,n]\!]$, en utilisant les questions précédentes pour l'hérédité conduit à $\mathbb{P}(X_k=k-1)=\dfrac{(n-1)!k(k-1)}{2(n-k+1)!n^{k-1}}$.