Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Veuillez encadrer les réponses finales à chaque question.

Exercice 1.

Partie I

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Montrer que f est diagonalisable.

b) Déterminer une matrice inversible P *dont la première ligne ne contient que des « 1 »* telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit la matrice

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Calculer P^{-1}.

2. **a)** Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

b) Montrer que si $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, alors H et D commutent.

3. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Partie II

Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 et que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$. f est-il diagonalisable ?

5. **a)** Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$.
Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

6. **a)** Montrer qu'il existe un couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

b) Montrer que p et q sont des projecteurs, et calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

c) Trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q, qui vérifient $h^2 = f$.

7. **a)** Trouver une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de f.

b) Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette base $\mathcal{C}$.

8. **a)** Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$.

b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

c) Montrer que h est diagonalisable en précisant ses valeurs propres.

Exercice 2.

Sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, on définit définit l'application $\langle ., . \rangle$ par

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E.

10. **a)** Calculer, pour tout (i, j) de $[\![0\,;\,3]\!]^2$, $\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j \rangle$.

b) La base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de E est-elle une base orthogonale ?

11. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}^2)$.

a) Déterminer $\mathrm{F}^\perp$.

b) Donner une base orthogonale de F, puis une base orthogonale de $\mathrm{F}^\perp$.

c) En déduire une base orthogonale $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}i_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ de E telle que, pour tout i de $[\![0\,;\,3]\!]$, $\deg(\mathrm{P}_i) = i$.

12. Soit une base orthonormale $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E. et soit P un polynôme de E tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(\mathrm{P}(t)\big)^2 \mathrm{d}t = 1$.

a) Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.

b) Sans déterminer les réels α_i, déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.

c) Justifier que pour tous (x_1, x_2, x_3, x_4) et (y_1, y_2, y_3, y_4) quadruplets de réels,

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}.$$

d) En déduire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\mathrm{P}(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \big(\pi_i(x)\big)^2}.$$

Exercice 3.

On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$. On note $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir face à chaque lancer.
On note, pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i (respectivement F_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (respectivement face) ». Par abus de notation, on pourra omettre les symboles d'intersection entre ces événements et noter par exemple $\mathrm{F}_1\mathrm{P}_2\mathrm{F}_3\mathrm{F}_4$ l'événement $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3 \cap \mathrm{F}_4$.
On appelle *palindrome* une séquence *symétrique* d'au moins deux lancers, c'est-à-dire une succession invariante qu'on la lise de gauche à droite ou de droite à gauche.
Ainsi « $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ » et « $\mathrm{P}_1\mathrm{F}_2\mathrm{P}_3$ » sont des palindromes, tandis que « $\mathrm{P}_1\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ » n'en est pas un.
On note X le rang d'apparition du premier palindrome depuis le premier lancer, de sorte que :

- si on obtient $\mathbf{F_1F_2}\mathrm{F}_3\mathrm{P}_4$...., alors $\mathrm{X} = 2$;
- si on obtient $\mathbf{F_1P_2P_3F_4}\mathrm{F}_5$...., alors $\mathrm{X} = 4$.

12. a) Justifier que la loi conditionnelle de $\mathrm{X} - 1$ sachant F_1 est géométrique de paramètre q.

b) En déduire l'espérance conditionnelle de $\mathrm{X} - 1$ sachant F_1.

13. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{X} - 1|\mathrm{P}_1)$.

14. Déterminer finalement $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

Exercice 4.

15. Pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

On pose alors, pour tout $x > 0$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

16. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

17. a) Établir que : $\quad \forall x > 0, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

d) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

18. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\, dt - \ln(x) + f(1).$$

b) Justifier la convergence de

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\, dt.$$

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.