

EXERCICE 1.**Partie I**

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons $\text{rg}(f - \lambda \text{id}) = \text{rg}(A - \lambda I_3)$:

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 4 & -7 \\ -8 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{L1} \longleftrightarrow \text{L2} \begin{pmatrix} -8 & -4-\lambda & 8 \\ 8-\lambda & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$8 \cdot \text{L2} + (-\lambda + 8) \cdot \text{L1} \longrightarrow \text{L2} \begin{pmatrix} -8 & -\lambda-4 & 8 \\ 0 & \lambda^2 - 4 \cdot \lambda & -8 \cdot \lambda + 8 \\ 0 & 0 & -\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(f - \lambda \cdot \text{id}) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, 4\}$ donc f possède 3 valeurs propres distinctes, et comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, f est diagonalisable.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a) M commute avec D si, et seulement si, M est diagonale.

b) $H^2 = D \Rightarrow H^2 D = D^3 = D \cdot D^2 = D H$.

3. $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$, soit 4 solutions.

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie II

4. $A^2 = 5A - 4I_3$, $Q = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$ est annulateur de A . $\text{rg}(A - I_3) = 1$ donc $\lambda = 1$ est valeur propre de f et $\dim(\text{SEP}(f, 1)) = 2$. $\text{rg}(A - 4I_3) = 2$ donc $\mu = 4$ est valeur propre de f et $\dim(\text{SEP}(f, 4)) = 1$.

$\dim(E) = 3 = \dim(\text{SEP}(f, 1)) + \dim(\text{SEP}(f, 4))$ donc f est diagonalisable.

5. a) $\forall m \geq 1, J^m = 3^{m-1}J$.

b) En appliquant la formule du binôme à $A = J + I_3$ avec J et I_3 qui commutent, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{Id}_E + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$. Cette relation est encore valable pour $m = 0$.

6. a) Il suffit d'écrire $f^m = 4^m \left(\frac{1}{3}J\right) + \left(\text{Id}_E - \frac{1}{3}J\right)$.

$$p = \text{Id}_E - \frac{1}{3}J \text{ et } q = \frac{1}{3}J \text{ conviennent.}$$

- b) Avec $P = \mathcal{M}_B(p) = I_3 - \frac{1}{3}J$ et $Q = \mathcal{M}_B(q) = \frac{1}{3}J$:

$$P^2 = I_3 - \frac{2}{3}J + \frac{1}{9}J^2 = I_3 - \frac{1}{3}J = P$$

$$Q^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{3}J = Q$$

Donc p et q sont des projecteurs.

$$PQ = \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right) \frac{1}{3}J = \frac{1}{3}J - \frac{1}{9}J^2 = 0$$

$$\text{et } QP = \frac{1}{3}J \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right) = \frac{1}{3}J - \frac{1}{9}J^2 = 0.$$

Donc $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- c) Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a $h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q$.

Comme (p, q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.

Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par : $h = \pm p \pm 2q$.

7. a) On détermine les sous-espaces propres de f :

$$E_1(f) = \text{Vect}(w_1, w_2) \text{ avec } w_1 = (1, -1, 0) \text{ et } w_2 = (0, 1, -1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(w_3) \text{ avec } w_3 = (1, 1, 1).$$

Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, f est diagonalisable.

Et (w_1, w_2, w_3) est une base de vecteurs propres pour f .

- b) Notons $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$. Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. a) $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $K^2 = I_2$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est non diagonale telle

que $Y^2 = D$.

b) Soit l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la base relativement à $\mathcal{C}$ est Y . Alors $Y^2 = D = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ entraîne $h^2 = f$.

Et comme Y n'est pas combinaison linéaire de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(p)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q)$, donc f n'est pas combinaison linéaire de p et q .

c) $\text{rg}(Y - 2I_3) = 2$ (dernière ligne nulle), $\text{rg}(Y + I_3) = 2$ (deux premières lignes égales) et $\text{rg}(Y - I_3) = 2$ (deux premières lignes opposées) donc Y admet 3 valeurs propres distinctes : Y est diagonalisable et $\text{Sp}(Y) = \{-1, 1, 2\}$.

EXERCICE 2.

9. Question traitée en cours. Pour l'aspect « défini », on a :

$$\langle P, Q \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1; 1], (P(t))^2 = 0 \text{ car } t \mapsto$$

$(P(t))^2$ est une fonction continue et positive sur $[-1; 1]$.

Ainsi P possède une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

10. a) $\forall (i, j) \in \llbracket 0; 3 \rrbracket^2, \langle X^i, X^j \rangle = \int_{-1}^1 t^{i+j} dt = \begin{cases} \frac{2}{i+j+1} & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

b) $\langle 1, X^2 \rangle = \frac{2}{3}$ donc la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ n'est pas orthogonale.

11. Soit $F = \text{Vect}(1, X^2)$.

a) On peut résoudre $\begin{cases} aX^3 + bX^2 + cX + d \perp 1 \\ aX^3 + bX^2 + cX + d \perp X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$,

ou observer que :

- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = 4 - 2 = 2$;

- Par les calculs précédents, $\begin{cases} X \perp 1 \text{ et } X \perp X^2 \\ X^3 \perp 1 \text{ et } X^3 \perp X^2 \end{cases}$ donc (X, X^3) est un

famille libre, donc une base (dimension!), de $F^\perp$.

Bilan : $F^\perp = \text{Vect}(X, X^3)$.

b) $(1, 3X^2 - 1)$ est une base orthogonale de F .

$(X, 5X^3 - 3X)$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

c) En concaténant ces bases, on obtient :

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1, X, 3X^2 - 1, 5X^3 - 3X)$ base orthogonale de E telle que, pour tout i de $\llbracket 0; 3 \rrbracket$, $\deg(\pi_i) = i$.

12. a) $(\pi_i)_{0 \leq i \leq 3}$ étant une base, il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i$.

b) $\|P\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i \right\|^2$, or les $\alpha_i \pi_i$ sont deux à deux orthogonaux, donc par le théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \sum_{i=0}^3 \|\alpha_i \pi_i\|^2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 \|\pi_i\|^2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 \text{ car les } \pi_i \text{ sont unitaires.}$$

Et comme par hypothèse $\|P\|^2 = 1$, $\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 = 1$.

c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ donne :

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \forall (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4, |x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}.$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|P(x)| = \left| \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i(x) \right| \leq \sum_{i=0}^3 |\alpha_i \pi_i(x)| \text{ par l'inégalité triangulaire,}$$

$$|P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^3 (\pi_i(x))^2}, \text{ et par b),}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 (\pi_i(x))^2}.$$

EXERCICE 3.

12. a) Si le premier lancer donne F_1 , le premier palindrome sera obtenu dès le prochain Face, donc $X - 1$, qui est nombre de lancers restant avant la fin

de ce palindrome, est le rang d'apparition du prochain face, donc la loi conditionnelle de $X - 1$ sachant F_1 est géométrique de paramètre q .

b) $\mathbb{E}(X - 1|F_1) = \frac{1}{q}$.

13. De même, $\mathbb{E}(X - 1|P_1) = \frac{1}{p}$ car sachant P_1 , $X - 1$ suit $\mathcal{G}(p)$.

14. Par le théorème de l'espérance totale avec le système complet (F_1, P_1) , $\mathbb{E}(X - 1)$ existe et vaut :

$$\mathbb{E}(X - 1) = \mathbb{P}(F_1)\frac{1}{q} + \mathbb{P}(P_1)\frac{1}{p} = 1 + 1 = 2.$$

Et par linéarité, $\mathbb{E}(X) = 2 + 1 = 3$.

EXERCICE 4.

15. Soit $x > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est définie, continue et positive sur $[x, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(e^{-t})$. Il s'ensuit par négligabilité, puisque $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$.

En revanche $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge par équivalence

des fonctions puisque l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

A fortiori, on ne peut pas prendre $x < 0$ et f est définie sur $]0, +\infty[$.

16. a) Je note g la fonction continue $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}/t$ et G l'une de ses primitives. Soit $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$, ℓ existe sinon l'intégrale définissant $f(x)$ divergerait.

Alors : $\forall x > 0, f(x) = \ell - G(x)$.

Comme G est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée g clairement $\mathcal{C}^\infty$, G est $\mathcal{C}^\infty$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

b) $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -e^{-x}/x < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

17. a) Soit $x > 0, \forall t \geq x, 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

Par croissance de l'intégrale, toutes ces intégrales étant convergentes,

$$\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

b) Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) Soit $A > x > 0$. En intégrant par parties,

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

$$\text{Et en faisant tendre } A \text{ vers } +\infty, f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

d) On montre comme en 19.a), que :

$$\forall x > 0, 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{e^{-x}}{x^2}, \text{ ce qui prouve, en divisant par } \frac{e^{-x}}{x} \text{ et}$$

$$\text{par le théorème des gendarmes, que } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right), \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

18. a) Soit $x > 0$.

$$f(x) = \int_x^{+\infty} g(t) dt = \int_x^1 g(t) dt + f(1)$$

$$\text{Or } \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_x^1 g(t) dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \int_x^1 g(t) dt + \ln(x)$$

$$\text{Donc pour tout réel } x > 0, f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \ln(x) + f(1).$$

b) $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ est convergente car faussement impropre puisque $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ et tend vers -1 en 0.

c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ est finie, on déduit de 20.a) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + f(1)}{-\ln(x)} = 1$$

$$\text{Donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$