Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Veuillez encadrer les réponses finales à chaque question.

EXERCICE 1.

On veut calculer les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases} .$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

- Déterminer la matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
- Donner une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .
- Montrer que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A . Donner la valeur propre, λ_1 qui lui est associée.
- Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ à déterminer, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
 - A est-elle diagonalisable ?
 - Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 de la forme $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 de la forme

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} .$$

- Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1} .
 - Vérifier que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D)$, et justifier que ce résultat était prévisible.
- Exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P , D et P^{-1} et n .
En déduire que pour tout entier naturel non nul k , $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$. Calculer A^2 .
- Donner un polynôme annulateur de A de degré 3. Quelles sont ses racines ? Était-ce prévisible ?
- On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Montrer que dans ce cas, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- On suppose ici que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 , v_0 , w_0 pour que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément. Quelles sont alors les limites de ces suites ?
- Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D , alors M est diagonale.
 - En déduire qu'il n'existe pas de matrice M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$.
 - Existe-t-il une matrice B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

EXERCICE 2.

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

11. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
12. a) Calculer, pour tout (i, j) de $[[0; 3]]^2$, $\langle X^i, X^j \rangle$.
 b) La base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E est-elle une base orthogonale ?
13. Soit $F = \text{Vect}(1, X^2)$.
 a) Déterminer $F^\perp$.
 b) Donner une base orthogonale de F , puis une base orthogonale de $F^\perp$.
 c) En déduire une base orthogonale $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E telle que, pour tout i de $[[0; 3]]$, $\deg(\pi_i) = i$.

EXERCICE 3.

On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir face à chaque lancer.

On note, pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i (respectivement F_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (respectivement face) ». Par abus de notation, on pourra omettre les symboles d'intersection entre ces événements et noter par exemple $F_1P_2F_3F_4$ l'événement $F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4$.

On appelle *palindrome* une séquence *symétrique* d'au moins deux lancers, c'est-à-dire une succession invariante qu'on la lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Ainsi « F_1F_2 » et « $P_1F_2P_3$ » sont des palindromes, tandis que « $P_1F_1F_2$ » n'en est pas un.

On note X le rang d'apparition du premier palindrome depuis le premier lancer, de sorte que :

- si on obtient $F_1F_2F_3P_4\dots$, alors $X = 2$;
- si on obtient $F_1P_2P_3F_4F_5\dots$, alors $X = 4$.

14. Montrer, en justifiant l'existence de ces sommes, que

$$p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-2} = p \quad \text{et} \quad p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-2} = 1 + p.$$

15. a) Justifier que $X(\Omega) = [[2, +\infty[[$.

b) Justifier que $\mathbb{P}(X = 2) = p^2 + q^2$, et $\mathbb{P}(X = 3) = p^2q + q^2p$.

c) Montrer que : $\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = p^2q^{k-2} + q^2p^{k-2}$.

16. Vérifier que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ et montrer que X admet une espérance que l'on calculera.

EXERCICE 4.

17. Pour quelles valeurs du réel x , l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est-elle convergente ?

On pose alors, pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

18. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

19. a) Établir que : $\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

d) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

20. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \ln(x) + f(1).$$

b) Justifier la convergence de

$$\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt.$$

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.