EXERCICE 1.

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$
3. $AE_1 = -E_1$ donc est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1.$
4. a) A admet trois valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, 1).$
 b) Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A possède trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.
- c) $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient (et c'est le seul).
- d) $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient (et c'est le seul).
5. a) $P = (E_1|E_2|E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.
- b) $\text{Tr}(A) = 0 = \text{Tr}(D),$ normal puisque 2 matrices semblables ont la même trace.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}.$
 $\forall k \in \mathbb{N}, D^{2k-1} = \text{diag}((-1)^{2k-1}, 0^{2k-1}, 1^{2k-1}) = \text{diag}(-1, 0, 1) = D,$ donc
 $A^{2k-1} = PDP^{-1} = A.$
 $\forall k \in \mathbb{N}, D^{2k} = \text{diag}((-1)^{2k}, 0^{2k}, 1^{2k}) = \text{diag}(1, 0, 1) = D^2,$ donc
 $A^{2k} = PD^2 P^{-1} = A^2.$
 Et $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

a) De $A^3 = A$ on déduit que $X^3 - X$ est annulateur de $A.$ Ses racines sont $-1, 0$ et $1,$ ce qui était prévisible puisque toutes les valeurs propres de A sont des racines de tout polynôme annulateur de $A.$

7. a) $\forall k \in \mathbb{N}, X_{2k-1} = A^{2k-1} X_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
 $\forall k \in \mathbb{N}, X_{2k} = A^{2k} X_0 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
 Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = w_n = 1.$
- b) v est constante (tout court) et u et w sont constantes à partir du rang $n = 1.$ Leur limite commune est $1.$
8. $\forall k \in \mathbb{N}, X_{2k-1} = A^{2k-1} X_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
 $\forall k \in \mathbb{N}, X_{2k} = A^{2k} X_0 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
 Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n, v_n = (-1)^n \times 2$ et $w_n = 0.$
 u et v n'ont pas de limite, et w converge vers $0.$
9. Partons de $X_0 = abc$ quelconque.
 $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ v_{2k-1} \\ w_{2k-1} \end{pmatrix} = X_{2k-1} = A^{2k-1} X_0 = AX_0$
 $= \begin{pmatrix} -3 \cdot a + b + 3 \cdot c \\ -4 \cdot a + b + 4 \cdot c \\ -2 \cdot a + b + 2 \cdot c \end{pmatrix}.$
 $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{2k} \\ v_{2k} \\ w_{2k} \end{pmatrix} = X_{2k} = A^{2k} X_0 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} -a + b + c \\ b \\ -2 \cdot a + b + 2 \cdot c \end{pmatrix}.$
 Puisque ces termes ne dépendent que de la parité de $k,$ une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0, w_0 pour que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément est $u_0 = w_0$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = v_0$.

10. a) En prenant $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on montre par le calcul que $MD = DM$ si, et seulement si, M est diagonale.

b) Supposons que $M^2 = D$. Alors $MD = MM^2 = M^3 = M^2M = DM$, donc M est diagonale, disons $M = \text{diag}(a, b, c)$.

Alors $M^2 = D$ entraîne $a^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, il n'existe pas de matrice M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$.

c) $B^2 = A \Rightarrow P^{-1}B^2P = P^{-1}AP \Rightarrow (P^{-1}BP)^2 = D$, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de matrice B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

EXERCICE 2.

11. Question traitée en cours. Pour l'aspect « défini », on a :

$$\langle P, Q \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1; 1], (P(t))^2 = 0 \text{ car } t \mapsto$$

$(P(t))^2$ est une fonction continue et positive sur $[-1; 1]$.

Ainsi P possède une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

12. a) $\forall (i, j) \in \llbracket 0; 3 \rrbracket^2, \langle X^i, X^j \rangle = \int_{-1}^1 t^{i+j} dt = \begin{cases} \frac{2}{i+j+1} & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

b) $\langle 1, X^2 \rangle = \frac{2}{3}$ donc la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ n'est pas orthogonale.

13. Soit $F = \text{Vect}(1, X^2)$.

a) On peut résoudre $\begin{cases} aX^3 + bX^2 + cX + d \perp 1 \\ aX^3 + bX^2 + cX + d \perp X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$,

ou observer que :

- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = 4 - 2 = 2$;

- Par les calculs précédents, $\begin{cases} X \perp 1 \text{ et } X \perp X^2 \\ X^3 \perp 1 \text{ et } X^3 \perp X^2 \end{cases}$ donc (X, X^3) est un

famille libre, donc une base (dimension!), de $F^\perp$.

Bilan : $F^\perp = \text{Vect}(X, X^3)$.

b) $(1, 3X^2 - 1)$ est une base orthogonale de F .

$(X, 5X^3 - 3X)$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

c) En concaténant ces bases, on obtient :

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1, X, 3X^2 - 1, 5X^3 - 3X)$ base orthogonale de E telle que, pour tout i de $\llbracket 0; 3 \rrbracket$, $\deg(\pi_i) = i$.

EXERCICE 3.

14. Ces sommes existent car $|q| < 1$ et par le cours :

$$p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-2} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p^2 \frac{1}{1-p} = p$$

$$p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-2} = \frac{p^2}{q} \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{p^2}{q} \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) = \frac{1-p^2}{1-p} = 1+p$$

15. a) Les plus petits palindromes sont P_1P_2 ou F_1F_2 , et alors $X = 2$.

Et si $k \geq 3$, $P_1F_2 \dots F_{k-1}P_k$ est un palindrome de longueur k .

Donc $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$.

b) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(P_1P_2 \cup F_1F_2) \stackrel{\text{incomp.}}{=} \mathbb{P}(P_1P_2) + \mathbb{P}(F_1F_2) \stackrel{\text{indép.}}{=} p^2 + q^2$,

$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3) \stackrel{\text{incomp.}}{=} \mathbb{P}(P_1F_2P_3) + \mathbb{P}(F_1P_2F_3) \stackrel{\text{indép.}}{=} p^2q + q^2p$.

c) La décomposition précédente se généralise sans problème :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = p^2q^{k-2} + q^2p^{k-2}.$$

16. La première question montre, puisque $|p| < 1$ et $|q| < 1$, que :

- $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = p + q = 1$;

- X admet une espérance par convergence absolue (tous les termes sont positifs);

- $\mathbb{E}(X) = (1+p) + (1+q) = 3$.

EXERCICE 4.

17. Soit $x > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est définie, continue et positive sur $[x, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(e^{-t})$. Il s'ensuit par négligabilité, puisque $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$.

En revanche $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge par équivalence des fonctions puisque l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

A fortiori, on ne peut pas prendre $x < 0$ et f est définie sur $]0, +\infty[$.

18. a) Je note g la fonction continue $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}/t$ et G l'une de ses primitives. Soit $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$, ℓ existe sinon l'intégrale définissant $f(x)$ divergerait.

Alors : $\forall x > 0, f(x) = \ell - G(x)$.

Comme G est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée g clairement $\mathcal{C}^\infty$, G est $\mathcal{C}^\infty$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

b) $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -e^{-x}/x < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

19. a) Soit $x > 0$. $\forall t \geq x, 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$.

Par croissance de l'intégrale, toutes ces intégrales étant convergentes,

$$\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

b) Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) Soit $A > x > 0$. En intégrant par parties,

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

$$\text{Et en faisant tendre } A \text{ vers } +\infty, f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

d) On montre comme en 19.a), que :

$\forall x > 0, 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{e^{-x}}{x^2}$, ce qui prouve, en divisant par $\frac{e^{-x}}{x}$ et

par le théorème des gendarmes, que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$

Donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

20. a) Soit $x > 0$.

$$f(x) = \int_x^{+\infty} g(t) dt = \int_x^1 g(t) dt + f(1)$$

$$\text{Or } \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_x^1 g(t) dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \int_x^1 g(t) dt + \ln(x)$$

$$\text{Donc pour tout réel } x > 0, f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \ln(x) + f(1).$$

b) $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ est convergente car faussement impropre puisque $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ et tend vers -1 en 0.

c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ est finie, on déduit de 20.a) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + f(1)}{-\ln(x)} = 1$$

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.