

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Veuillez encadrer les réponses finales à chaque question.

### EXERCICE 1

On rappelle que la fonction  $\Gamma$  (gamma) est la fonction, qui à tout réel  $x$  strictement positif, associe  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

On admet que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

1. On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite. On pose  $U = \frac{X^2}{2}$  et  $V = \frac{Y^2}{2}$ .

a) Montrer que la loi commune de  $U$  et  $V$  est  $\gamma(1/2)$ .

b) Donner l'espérance et la variance  $U$  et  $V$ .

2. On pose  $W = U + V$  et on rappelle que  $W$  est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Donner sans calcul la loi de  $W$  ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si  $f_U$  et  $f_V$  sont respectivement des densités de  $U$  et  $V$ , alors une densité de  $W$  est la fonction  $f_W$ , nulle sur  $] -\infty; 0[$ , et définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

- c) Pour tout réel  $x$  strictement positif, on pose  $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$ .

Déduire des questions précédentes que l'intégrale  $I(x)$  converge et donner sa valeur.

### EXERCICE 2

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si  $M$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on désigne par  $\text{Tr}(M)$  la trace de la matrice  $M$ , c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On rappelle que  $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire.

Soit  $A$  une matrice non nulle donnée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'application  $f$  qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe :

$$f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A.$$

3. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
4. Montrer que  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas  $\text{Tr}(A) = 0$  et  $\text{Tr}(A) \neq 0$ ).
5. a) Établir que, pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :  $f \circ f(M) = \text{Tr}(A)f(M)$ .  
b) En déduire les valeurs propres possibles de  $f$ .
6. Calculer  $f(A)$  et justifier que 0 est valeur propre de  $f$ .
7. Montrer que, si  $\text{Tr}(A) = 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.
8. On suppose dans cette question que la trace de  $A$  est non nulle.  
a) À l'aide du théorème du rang, montrer que  $\dim(\text{Ker}(f)) = n^2 - 1$ .  
b) Conclure que  $f$  est diagonalisable.

### EXERCICE 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur de :

$$\Delta = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2 e^{-t} dt.$$

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et  $F = \mathbb{R}_1[X]$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les deux polynômes 1 et  $X$ .

9. a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel  $k$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$  converge, et donner sa valeur.  
b) Montrer que l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E$ , associe  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $E$ , dont la norme associée sera notée  $\| \cdot \|$ .
- c) Justifier que, pour tout couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 0; 3 \rrbracket^2$ ,  $\langle X^i, X^j \rangle = (i+j)!$ .
10. On note  $p_F$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $F$ .  
a) Déterminer une base orthonormale  $(P_0, P_1)$  de  $F$  (on ne demande pas de base orthonormale de  $E$ !).  
b) En déduire  $p_F(X^3)$ . On notera  $Q_0$  ce polynôme.
11. a) Montrer que  $\Delta = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^3 - (aX + b)\|^2$ .  
b) Justifier que  $\Delta = \|X^3 - (aX + b)\|^2$  si, et seulement si,  $aX + b = Q_0$ .  
c) En déduire  $\Delta$ .

## PROBLÈME

## Question préliminaire

12. Soit  $x$  un réel quelconque.

- a) Justifier que la fonction  $t \mapsto \max(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq x, \\ x & \text{si } t > x. \end{cases}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

On considère maintenant la fonction  $\Psi$  définie par  $\Psi(x) = \int_0^1 \max(x, t) dt$ .

- b) Montrer que :  $\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x < 1, \\ x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire  $Y$ , elle aussi définie que  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , en posant, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt.$$

Autrement dit :

$$Y = \Psi(X).$$

Partie 1 : étude de plusieurs cas où  $X$  est discrète

13. Vérifier que si  $X$  suit une loi géométrique alors on a :  $Y = X$ .

14. On suppose, dans cette question, que  $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  et que l'on a :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

a) Déterminer la valeur de  $\mathbb{P}(X = 0)$ .

b) Vérifier que  $Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ .

c) Sachant que `grand(1,1,"uin",1,4)` génère un entier de  $\llbracket 1; 4 \rrbracket$  suivant la loi uniforme, compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable  $Y$ .

```
(L1) function y=simule();
(L2) u=grand(1,1,"uin",1,4);
(L3) if (u<=.....) then
(L4)     y=.....
(L5)     else y=.....
(L6) end;
(L7) endfunction
```

15. Seule question supprimée du sujet original – On supposait dans cette question que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ ...

Partie 2 : étude de plusieurs cas où  $X$  est à densité

16. On suppose, dans cette question, que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 1[$ , avec  $X(\Omega) = [0; 1[$ . On rappelle que l'instruction Scilab `rand()` simule une telle variable.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a :  $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$ .

b) En déduire  $Y(\Omega)$ .

c) Montrer alors que, pour tout  $x$  de  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$ , on a :  $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$ .

d) Expliquer pourquoi  $Y$  est une variable à densité.

e) Donner la valeur de  $\mathbb{E}(Y)$ .

f) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable  $Y$ .

```
function y=simule();    y=.....;
endfunction
```

17. On suppose, dans cette question, que  $X - 1$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (où  $\lambda$  est un réel strictement positif).

a) Toujours en utilisant la première question, exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de  $Y$ .

c) Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0; 1[$ . Vérifier que la variable aléatoire  $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , puis compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire  $Y$ .

```
function y=simule(lambda);    y=.....
endfunction
```

18. On suppose, dans cette question, que  $X$  suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que  $X(\Omega) = \mathbb{R}$  et on note  $\Phi$  la fonction de répartition de  $X$ .

a) Vérifier que  $Y(\Omega) = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$ .

b) Donner la valeur de  $\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right)$ .

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements  $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$  pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x - 1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

d) La variable aléatoire  $Y$  est-elle à densité ? Est-elle discrète ?