Exercice 1

1. a) Rappelons que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}$, et que X et Y suivant la même loi, U et V suivent une loi identique.

- $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Pour $x \in \,]-\infty\,;0\,[$, $F_U(x) = \mathbb{P}(U \leqslant x) = 0$ puisque $X^2 \geqslant 0$.
- Pour $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $F_U(x) = \mathbb{P}(X^2/2 \leqslant x) = \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2x =}) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
- Puisque Φ et la fonction nulle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(0) = 1/2$ de sorte que $2\Phi(0) - 1 = 0$, F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Donc U est une variable à densité, dont une densité est, par dérivation sur $\mathbb{R}^*$,

$$f_U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Or pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{2x}) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi x}}e^{-(\sqrt{2x})^2/2} = \dfrac{x^{(1/2)-1}e^{-x}}{\Gamma(1/2)}$.

On reconnaît en f_U une densité de la loi $\gamma(1/2)$.

$$\boxed{\text{U et V suivent la loi } \gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).}$$

b) Et du coup le cours donne

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(V) = \frac{1}{2}.}$$

2. a) Puisque U et V sont indépendantes, la stabilité de la loi γ assure que

$$\boxed{\text{W suit la loi } \gamma(1), \text{ qui est aussi la loi exponentielle } \mathcal{E}(1).}$$

b) Soit $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Puisque pour tout $t < 0$, $f_U(t) = 0$, l'intégrale définissant $f_W(x)$ se réduit à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t$.

Puisque pour tout $t > x$, $f_V(x-t) = 0$, l'intégrale définissant $f_W(x)$ se réduit à $\displaystyle\int_0^{x} f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;+\infty\,[,\quad f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t.}$$

c)
- D'une part, puisque $W \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, une densité de W peut être (en deux mots !) : $f_W : x \mapsto e^{-x}$ pour $x > 0$.
- D'autre part, par 2b), une densité de W peut être

$$f_W(x) \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}e^{-(x-t)}}{\pi\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{\pi}I(x) \text{ pour } x > 0.$$

- Comme deux densités coïncident, sauf peut-être en un nombre fini de points, on en déduit $I(x)$ existe et vaut π, sauf peut-être pour un nombre fini de réels de $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 2

3. Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Comme $(\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(M)) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- $f(\lambda M + N) = \mathrm{Tr}(A)(\lambda M + N) - \mathrm{Tr}(\lambda M + N)A$, et par linéarité de Tr, $f(\lambda M + N) = \lambda(\mathrm{Tr}(A)M + \mathrm{Tr}(M)A) + (\mathrm{Tr}(A)N + \mathrm{Tr}(N)A) = \lambda f(M) + f(N)$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4.
- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $f(I_n) = -nA \neq 0$.
- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors pour M matrice diagonale dont la diagonale vaut $(1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$ (donc M non nulle de trace nulle), $f(M) = \mathrm{Tr}(A)M \neq 0$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul.}}$$

5. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la linéarité de la trace,

$f \circ f(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(f(M))A = \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(A)M) - \mathrm{Tr}(M)A)A$

$f \circ f(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M) - \big(\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)\big)A = \mathrm{Tr}(A)f(M)$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice M de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f \circ f(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M).}$$

b) La question précédente montre que $f^2 = \mathrm{Tr}(A)f$, donc $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de f. Comme $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X = X(X - \mathrm{Tr}(A))$, ses racines sont 0 et $\mathrm{Tr}(A)$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } f \text{ sont 0 et } \mathrm{Tr}(A).}$$

6. $f(A) = \mathrm{Tr}(A)A - \mathrm{Tr}(A)A = 0 = 0 \times A$ et $A \neq 0$, donc

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } f.}$$

7. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, la seule valeur propre possible de f est 0. Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, son noyau, qui est aussi son sous-espace propre E_0 associé à 0, n'est pas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0\} \text{ et } \dim E_0 < \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

8. **a)** $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle (puisque $\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n \neq 0$). Donc $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \geqslant 1$, et comme $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$, $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \leqslant 1$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$. Le théorème du rang assure alors que

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.}$$

b) • Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \setminus \{0\}$. Alors $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{M}$. Donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ est valeur propre de f, et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})}$. En particulier, $\dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} \geqslant n^2 - 1$.

• Comme 0 est valeur propre de f, $\dim \mathrm{E}_0 \geqslant 1$.

• Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a

$$\dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} + \dim \mathrm{E}_0 \leqslant n^2.$$

On en déduit immédiatement :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\},\ \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}),\ \mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$$

et, puisque $\dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} + \dim \mathrm{E}_0 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Exercice 3

9. **a)** Pour tout k entier naturel, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ est la définition de $\Gamma(k+1)$ qui existe d'après le cours puisque Γ est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $k+1>0$. De plus, le cours donne $\Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ entier naturel, } \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \text{ existe, et vaut } k!).}$$

b) • Par linéarité, pour tout $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k k!$. Ainsi pour tout (P,Q) de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ existe.

• La bilinéarité, la symétrie et la positivité de $\langle .,. \rangle$ sont des conséquences immédiates de la linéarité de l'intégrale, de la commutativité du produit ($\mathrm{PQ} = \mathrm{QP}$) et de la positivité de l'intégrale (puisque $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$.)

• Supposons que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$. Comme $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue et positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$, son intégrale ne peut être nulle que si cette fonction est nulle sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Comme exp ne s'annule jamais, on en déduit : $\forall t \in\,]\,0\,;+\infty\,[\,, \mathrm{P}(t) = 0$.

P possède une infinité de racines, donc P est le polynôme nul. $\langle .,. \rangle$ est définie.

$$\boxed{\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

c)

$$\boxed{\left\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j \right\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(i+j+1) = (i+j)!}$$

10. **a)** $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$ mais $\langle 1, \mathrm{X} \rangle = 1! = 1 \neq 0$: $(1, \mathrm{X})$ n'est pas orthogonale.

Soit $\mathrm{R}_0 = 1$ et $\mathrm{R}_1 = \mathrm{X} + \alpha$. Cherchons α tel que $(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1)$ soit orthogonale.

$\langle \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1 \rangle = \langle 1, \mathrm{X} + \alpha \rangle = \langle 1, \mathrm{X} \rangle + \alpha \langle 1, 1 \rangle = 1 + \alpha$.

Donc $\mathrm{R}_0 \perp \mathrm{R}_1 \Leftrightarrow \alpha = -1$. Prenons $\mathrm{R}_1 = \mathrm{X} - 1$.

$||\mathrm{R}_0||^2 = \langle 1, 1 \rangle = 1$, et $||\mathrm{X}-1||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t-1)^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(3) - 2\Gamma(2) + \Gamma(1) = 2 - 2 + 1 = 1$. Par chance, $(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1)$ est orthonormale.

$$\boxed{(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1) = (1, \mathrm{X}-1) \text{ est une base orthonormale de F.}}$$

b) Puisque $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1)$ est une base orthonormale de F,

$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^3) = \left\langle \mathrm{X}^3, \mathrm{P}_0 \right\rangle \mathrm{P}_0 + \left\langle \mathrm{X}^3, \mathrm{P}_1 \right\rangle \mathrm{P}_1 = \left\langle \mathrm{X}^3, 1 \right\rangle 1 + \left\langle \mathrm{X}^3, \mathrm{X}-1 \right\rangle (\mathrm{X}-1) = 3! \times 1 + (4! - 3!)(\mathrm{X}-1) = 6 + 18(\mathrm{X}-1) = 18\mathrm{X} - 12$

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^3) = 18\mathrm{X} - 12 = \mathrm{Q}_0.}$$

11. Par définition de la norme associée à $\langle .,. \rangle$,

$\left|\left|\mathrm{X}^3 - (a\mathrm{X}+b)\right|\right|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

Comme $\Delta = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$,

$$\boxed{\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left|\left|\mathrm{X}^3 - (a\mathrm{X}+b)\right|\right|^2.}$$

a) Une autre façon d'écrire cette égalité est :

$\Delta = \displaystyle\inf_{a\mathrm{X}+b\in\mathrm{F}} \left|\left|\mathrm{X}^3 - (a\mathrm{X}+b)\right|\right|^2 = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathrm{F}} \left|\left|\mathrm{X}^3 - \mathrm{Q}\right|\right|^2.$

La caractérisation de minimisation en norme entraîne que Δ est atteinte si, et seulement si, $\mathrm{Q} = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^3)$.

$$\boxed{\Delta = \left|\left|\mathrm{X}^3 - (a\mathrm{X}+b)\right|\right|^2 \Leftrightarrow a\mathrm{X} + b = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^3) = \mathrm{Q}_0.}$$

b) Comme on connaît Q_0,

$\Delta = \left|\left|\mathrm{X}^3 - \mathrm{Q}_0\right|\right|^2 = \left|\left|\mathrm{X}^3 - (18\mathrm{X}-12)\right|\right|^2 = \left|\left|\mathrm{X}^3 - 18\mathrm{X}+12)\right|\right|^2 = \left|\left|\mathrm{X}^3\right|\right|^2 - 2\left\langle \mathrm{X}^3, \mathrm{Q}_0 \right\rangle + ||\mathrm{Q}_0||^2 =$

$6! - 2(18 \times 4! - 12 \times 3!) + 18^2\,||\mathrm{X}||^2 - 18 \times 12\,\langle \mathrm{X}, 1 \rangle + 12^2\,||1||^2 = \cdots = 360.$

$$\boxed{\Delta = 360.}$$

Problème

12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Je note f_x la fonction $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leqslant x, \\ t & \text{si } t > x. \end{cases}$

Comme $t \mapsto x$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, f_x est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$.
De plus, $\lim\limits_{t \to x^-} f_x(t) = x = \lim\limits_{t \to x^+} f_x(t) = f_x(x)$, donc f_x est continue en x.

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(x,t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) • Si $x \leqslant 0$, $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

• Si $x \in \left]0\,;1\right[$, $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}$. • Si $x \geqslant 1$, $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}t = x$.

$$\boxed{\Psi(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X discrète

13. Si X suit une loi géométrique, alors $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\mathrm{X} \geqslant 1$, donc par 1),

$$\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{X} \text{ si X suit une loi géométrique.}}$$

14. a) $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{X}=0}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X}=-1) - \mathbb{P}(\mathrm{X}=1) = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = 1/2.}$$

b) On a : $((\mathrm{X}=-1) \cup (\mathrm{X}=0)) = (\mathrm{Y}=1/2)$ et $(\mathrm{X}=1) = (\mathrm{Y}=1)$, donc

$$\boxed{\mathrm{Y}(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\},\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=1/2) = 3/4 \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{Y}=1) = 1/4.}$$

Il s'ensuit :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{5}{8},\ \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) = \frac{7}{16} \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \frac{3}{64}.}$$

c) Comme Y vaut 1/2 avec une probabilité 1/4 et 1 sinon, et comme `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une loi uniforme sur $[\![1\,;4]\!]$, les lignes suivantes conviennent :

```
if (u<=3) then y=1/2 else y=1
```

15. a) Comme $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$, et $(\mathrm{X}=0) = (\mathrm{Y}=1/2)$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}=k) = (\mathrm{Y}=k)$,

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Y}(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=1/2) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = \mathrm{e}^{-\lambda} \text{ et} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}.\end{array}}$$

b) Comme on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant son premier terme, et comme les lois de X et Y ne diffèrent que pour une valeur, puisque X possède une espérance et une variance, Y possède aussi une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{k \in \mathrm{Y}(\Omega)} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=1/2) + \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \lambda$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) = \sum_{k \in \mathrm{Y}(\Omega)} k^2\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=1/2) + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{4} + \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{4} + \mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2$$

Et par la formule de Konig-Huygens,

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{Y})^2 = \lambda - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Y}) \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{Y}) \text{ existent, } \mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \lambda \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \left(\lambda + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{4}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)}$$

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

16. a) Comme $y = \dfrac{x^2+1}{2}$ pour tout x de $\left[0\,;1\right[$ (y compris pour $x=0$), et puisque $\mathrm{X}(\Omega) = \left[0\,;1\right[$,

$$\boxed{\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}^2+1}{2}.}$$

b) $g : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ étant une bijection de $\left[0\,;1\right[$ sur $g(\left[0\,;1\right[) = \left[1/2\,;1\right[$ car continue et strictement croissante,

$$\boxed{\mathrm{Y}(\Omega) = \left[1/2\,;1\right[.}$$

c) Soit $x \in \left[1/2\,;1\right[$.

$F_Y(x) = \mathbb{P}\left(\frac{X^2+1}{2} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant 2x-1) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{2x-1})$ puisque X est positive. Comme $x \in [1/2\,;1[$, $\sqrt{2x-1} \in [0\,;1[$, et on a :

$F_Y(x) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{2x-1}) = F_X(\sqrt{2x-1}) = \frac{\sqrt{2x-1}-0}{1-0} = \sqrt{2x-1}$.

$$\boxed{\text{Pour } x \in [1/2\,;1[,\ F_Y(x) = \sqrt{2x-1}.}$$

d) Puisque $Y(\Omega) = [1/2\,;1[$, nous pouvons écrire :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ \sqrt{2x-1} & \text{si } 1/2 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Donc F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2;1\}$.

De plus : $\lim_{x\to 1/2^-} F_Y(x) = 0 = \lim_{x\to 1/2^+} F_Y(x) = F_Y(1/2)$,

et $\lim_{x\to 1^-} F_Y(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} F_Y(x) = F_Y(1)$, donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Y est une variable à densité.}}$$

e) Par linéarité,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X^2)+1}{2} = \frac{\mathbb{V}(X)+\mathbb{E}(X)^2+1}{2} = \frac{(1/12)+(1/4)+1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2/3.}$$

f)

```
y=(rand()^2+1)/2
```

17. a) $(X-1)(\Omega) =]0\,;+\infty[$ donc $X(\Omega) =]1\,;+\infty[$, et du coup

$$\boxed{Y = X.}$$

b) Sans (trop de) calcul :

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X-1)+1 = \frac{1}{\lambda}+1$, $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X-1) = \frac{1}{\lambda^2}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}+1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.}$$

c) Comme $U(\Omega) = [0\,;1[$ et $u \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$ est une bijection (car continue et strictement croissante) de $[0\,;1[$ sur $[0\,;+\infty[$, $W(\Omega) = [0\,;+\infty[$.

De plus, pour tout x de $[0\,;+\infty[$,

$F_W(x) = \mathbb{P}(W \leqslant x) = \mathbb{P}(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x) = \mathbb{P}(1-U \geqslant e^{-\lambda x}) = \mathbb{P}(U \leqslant 1-e^{-\lambda x})$,

avec $1-e^{-\lambda x} \in [0\,;1[$ et $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0\,;1[)$,

$F_W(x) = \mathbb{P}(U \leqslant 1-e^{-\lambda x}) = 1-e^{-\lambda x}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ.

$$\boxed{\text{W suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$

En simulant $W+1$, on simulera X.

```
y=-log(1-rand())/lambda+1
```

18. a)
- D'après 1), $Y(\Omega) \subset [1/2\,;+\infty[$.
- Comme $[X \leqslant 0] \subset [Y = 1/2]$, $\mathbb{P}(Y = 1/2) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant 0)$ donc $\mathbb{P}(Y = 1/2) \geqslant 1/2$.
- $h : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est une bijection (l'aurais-je déjà dit ?) de $]0\,;1[$ sur $]1/2\,;1[$ donc $]0\,;1[\subset X(\Omega)$ entraîne $]1/2\,;1[\subset Y(\Omega)$.
- Enfin, $X \geqslant 1$ entraînant $Y = X$ et $[1\,;+\infty[\subset X(\Omega)$, $[1\,;+\infty[\subset Y(\Omega)$.

$$\boxed{Y(\Omega) = [1/2\,;+\infty[,\ \text{non-“ouvrable” en } 1/2.}$$

b) 1.b) entraîne $\mathbb{P}(Y = 1/2) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \Phi(0) = 1/2$.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 1/2) = 1/2.}$$

c)
- Pour $x < 1/2$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 0$ puisque $Y(\Omega) = [1/2\,;+\infty[$.
- Pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, la formule des probabilités totales pour le système complet $([X \leqslant 0], [0 < X \leqslant 1], [X > 1])$ permet d'écrire :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}_{[X\leqslant 0]}(Y \leqslant x)\mathbb{P}(X \leqslant 0) + \mathbb{P}([0 < X \leqslant 1] \cap [\frac{X^2+1}{2} \leqslant x]) + \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}_{[X>1]}(Y \leqslant x)$$

$F_Y(x) = 1 \times \Phi(0) + \mathbb{P}(0 < X \leqslant \sqrt{2x-1}) + \mathbb{P}(X > 1) \times 0$

$F_Y(x) = \Phi(0) + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \Phi(0) = \Phi(\sqrt{2x-1})$

- Pour $x > 1$,

$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant 1) + \mathbb{P}(1 < Y \leqslant x) = F_Y(1) + \mathbb{P}(1 < X \leqslant x) = \Phi(1) + \Phi(x) - \Phi(1) = \Phi(x)$.

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

d) Comme $\mathbb{P}(Y = 1/2) \neq 0$, Y n'est pas une variable à densité.

Comme F_Y n'est pas constante par morceaux, puisqu'elle est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$, Y n'est pas une variable discrète.

$$\boxed{\text{Y n'est ni à densité, ni discrète.}}$$