

Sujet de l'épreuve EML 2013 option scientifique

posée le 29 Avril 2013

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Veillez encadrer les réponses finales à chaque question.

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

On note $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

2. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

En déduire que : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f **A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale**

5. Soit $(x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.

a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

b. Établir : $\forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

c. En déduire : $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$

7. Montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$.

9. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

11. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

$$\text{puis : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12. Montrer : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

13. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$?

Partie III : Étude d'une densité

On note $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \times \frac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

14. Montrer que h est une densité.

15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a. Calculer $A_0 U_0$.
b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.
c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{Tr}(A)$, est linéaire.
4. Montrer : $\forall (A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - a. Justifier : $U {}^tV \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U {}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V .
 - b. Exprimer $\text{Tr}(U {}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .
 - c. Quel est le rang de $U {}^tV$.
7. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
 - a. Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :
$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$
 - b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U {}^tV$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$, puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

10. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

a. Montrer : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.

b. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c. Montrer : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j$.

d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

11. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

12. Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

13. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

14. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

15. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16. Montrer que l'application : $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V^t V$.

17. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

18. a. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

c. On note e l'application identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.