Problème 1.

Partie I.

1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Soit $g_x : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$.

g_x est **continue et positive** sur $[0\,;+\infty[$.

De plus, $t^2 g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $g_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$$\boxed{\text{Par la règle de négligeabilité des intégrales de fonctions positives, } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

2. Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Par positivité de g_x, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Comme par la relation de Chasles, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g_x(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t$, on a $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 g_x(t)\mathrm{d}t$.

Comme : $\forall t \in [0\,;1[, \mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, on a : $\forall t \in [0\,;1[, \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}$. Par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t.}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1}\left[\ln(x+t)\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1}\ln\frac{x+1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$.

$$\boxed{\text{Par comparaison, } f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty.}$$

3. Soit $x \in]0\,;+\infty[$.

On a : $\forall t \in]0\,;+\infty[, 0 < g_x(t) < \dfrac{e^{-t}}{x}$.

Or le cours affirme que $\Gamma(1) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe et vaut $0! = 1$.

$$\boxed{\text{Par stricte croissance de l'intégrale, } 0 < f(x) < \frac{1}{x}.}$$

$$\boxed{\text{Par encadrement, } f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$$

4. $$\boxed{\text{Le cours affirme que } \Gamma(2) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 1! = 1.}$$

Soit $x \in]0\,;+\infty[$.

On a : $\forall t \in [0\,;+\infty[, \left|g_x(t) - \dfrac{e^{-t}}{x}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}(x-(x+t))}{(x+t)x}\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}t}{(x+t)x} \leqslant \dfrac{te^{-t}}{x^2}$, le majorant étant intégrable sur $[0\,;+\infty[$, d'intégrale valant $\dfrac{1}{x^2}$.

Or : $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x}\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\left|g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x}\right|\mathrm{d}t$, par l'inégalité triangulaire.

$$\boxed{\text{Donc } \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad \left(= \frac{1}{x^2}\right).}$$

On déduit de la majoration précédente : $|xf(x) - 1| \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc par encadrement $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, équivalant à

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Partie II.

5.a) On établit, comme en I.1., la convergence de l'intégrale, l'intégrande étant à nouveau continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, et négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de }]0\,;+\infty[,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

b) Après réduction au même dénominateur, on a, pour x, h et t définis dans l'énoncé :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{(x+t)^2\,|x+h+t|}.$$

Or $x+h+t > \dfrac{x}{2} > 0$ puisque $h > -\dfrac{x}{2}$, $t > 0$ et $x > 0$. Ceci fournit alors la majoration voulue :

$$\boxed{\forall (x,h,t)\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,\times\mathbb{R}^*\times[\,0\,;+\infty\,[\text{ tels que } h>-\frac{x}{2},\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}.}$$

c) On en déduit, toujours pour $(x,h,t)\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,\times\mathbb{R}^*\times[\,0\,;+\infty\,[$ tels que $h>-\dfrac{x}{2}$,

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+h+t}-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\right)-\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{2\,|h|\,\mathrm{e}^{-t}}{x^3}.$$

Comme $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+h+t}-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\right)-\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\,|h|\,\mathrm{e}^{-t}}{x^3}\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{2\,|h|}{x^3}$ encore une fois grâce à $\Gamma(1)$, on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}\text{ pour tout }(x,h)\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,\times\mathbb{R}^*\text{ tels que }h>-\frac{x}{2}.}$$

6. Soit $x\in\,]\,0\,;+\infty\,[$. L'encadrement précédent est valable pour tout h dans le voisinage $\left]-\dfrac{x}{2}\,;\dfrac{x}{2}\right[$ de 0.

Le théorème d'encadrement (gendarmes) assure que $\displaystyle\lim_{h\to0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right|$ existe et vaut 0.

Donc $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et vaut $\displaystyle-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$.

$$\boxed{f\text{ est dérivable sur }]\,0\,;+\infty\,[,\quad\text{et }\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[,\quad f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.}$$

7. Soit $x\in\,]\,0\,;+\infty\,[$ et $(\varepsilon,\mathrm{A})\in\,]\,0\,;1\,]\times[\,1\,;+\infty\,[$.

Les fonctions $t\mapsto\dfrac{-1}{x+t}$ et $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,\varepsilon\,;\mathrm{A}\,]$, une intégration par parties donne

$$\boxed{\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{x+\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.}$$

8. $\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{x+\mathrm{A}}\xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{}0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\dfrac{1}{x}$, et les deux intégrales tendant respectivement vers $-f'(x)$ et $f(x)$ lorsque ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, en passant à la limite dans l'identité précédente, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[,\quad f'(x)=-\frac{1}{x}+f(x).}$$

9. Le membre de droite de cette dernière égalité étant dérivable, f est deux fois dérivable avec

$$\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,,f''(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x).$$

Sur $]\,0\,;+\infty\,[$, f' étant dérivable donc continue, et $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ étant continue, on en déduit que f'' est continue.

$$\boxed{f\text{ est de classe }\mathcal{C}^2\text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[,\text{ avec }\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,,f''(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x).}$$

10. g est le produit de deux fonctions dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$, donc est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,,\quad g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(x)+\mathrm{e}^{-x}f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(-f(x)-\frac{1}{x}+f(x)\right).$$

$$\boxed{g\text{ est dérivable sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ avec }\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,,\quad g'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.}$$

11. Soit $x\in\,]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $\mathrm{A}\in[\,x\,;+\infty\,[$. On a :

$$\int_x^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u=\int_x^{\mathrm{A}}-g'(u)\mathrm{d}u=[-g(u)]_x^{\mathrm{A}}=-g(\mathrm{A})+g(x).$$

Or $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}f(\mathrm{A})=0$ d'après 3., donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}g(\mathrm{A})=0$. Donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_x^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ existe et vaut $g(x)$.
Et comme $f(x)=\mathrm{e}^xg(x)$, on a établi :

$$\boxed{\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,,\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\text{ existe et vaut }g(x),\text{ et }f(x)=\mathrm{e}^x\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.}$$

12.
$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\underset{x\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-x}f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x},}$$

le premier équivalent étant franchement une égalité, le second provenant de 4.

13. $n^2\left(n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^3\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc le terme général de la série à étudier est positif et négligeable devant $1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

Partie III.

14. • h est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t$ existe : c'est $f(1)$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{f(1)} \times f(1) = 1$.

$\boxed{h \text{ est bien une densité.}}$

15. Pour $t \geqslant 0$, $th(t)f(1) = \dfrac{t\mathrm{e}^{-t}}{1+t} = \dfrac{(1+t)\mathrm{e}^{-t}}{1+t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t} = \mathrm{e}^{-t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$.

Le premier terme de cette différence est intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$: il vaut $\Gamma(1) = 1$.

Le second terme de cette différence est intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$: il vaut $f(1)$.

Par conséquent, $t \mapsto th(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (h étant nulle sur $]-\infty\,;\,0\,[$), X possède une espérance valant $\dfrac{1}{f(1)}(1-f(1)) = \dfrac{1}{f(1)} - 1$.

$$\boxed{\text{X admet une espérance et } \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{f(1)} - 1.}$$

PROBLÈME 2.

Partie I.

Dans ce corrigé, je note SEP (M,λ) (respectivement SEP (φ,λ)) le sous-espace propre de la matrice M (respectivement de l'endomorphisme φ) associé à la valeur propre λ.

D'autre part, je confonds l'espace $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

1. *Première méthode.*

Soit $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\mathrm{Y}.$$

On a immédiatement :

$$\dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp} = 4-1 = 3 \text{ et } \forall \mathrm{W} \in (\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp}, \quad \mathrm{A}_0\mathrm{W} = \mathrm{A}_0\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_0\mathrm{W} = \mathrm{A}_0\,\langle \mathrm{V}_0,\mathrm{W}\rangle = 0,$$

ce qui prouve que 0 est valeur propre de A_0 et $(\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp} \subset \mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0)$, et donc que $\dim(\mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0)) \geqslant 3$.

Comme $\dim(\mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0)) = 4 - \mathrm{rg}(\mathrm{A}_0) \leqslant 3$ puisque A_0 n'est pas nulle, on a exactement $\mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0) = (\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp}$.

$$(\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / \left\langle \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}, \mathrm{V}_0 \right\rangle \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / x - y + 2z - t = 0 \right\}$$

$$(\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_0))^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} / x = y - 2z + t \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } \mathrm{A}_0 \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0).}$$

Seconde méthode.

Le calcul explicite de A_0 donne $\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

A_0 est manifestement de rang 1, donc 0 est une valeur propre de A_0 et $\dim(\mathrm{SEP}\,(\mathrm{A}_0,0)) = 3$.

Enfin : $\forall \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{A}_0 \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - t = 0$. On obtient bien le même sous-espace propre que par la première méthode.

2.a) Comme ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_0\mathrm{U}_0 = 1$, on a : $\boxed{\mathrm{A}_0\mathrm{U}_0 = 1 \times \mathrm{U}_0 ...}$

b) ... ce qui prouve que 1 est une valeur propre de A_0. Comme les sous-espaces propres sont en somme direccte, on a nécessairement : $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 0) + \dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) \leqslant 4$, donc $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) \leqslant 1$. Donc $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 0) + \dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) = 4$.

D'après le théorème de diagonalisabilité,

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable, } \mathrm{Sp}(A_0) = \{0; 1\},\ \dim \mathrm{SEP}(A_0, 0) = 3 \text{ et } \dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) = 1.}$$

c) Le cours affirme qu'une matrice P de passage vers une base formée de vecteurs propres fera l'affaire. Par exemple :

$$\boxed{\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } A_0 = PDP^{-1}.}$$

Partie II.

3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

$$\boxed{\mathrm{Tr} \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $C = AB$ et $D = BA$.

- $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}$.
- $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} b_{k,\ell} a_{\ell,k}$.

Et ces deux sommes sont égales (en posant $k = j$ et $\ell = i$, ces indices étant muets !).

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).}$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Reprenons le calcul précédent de $\mathrm{Tr}(BA)$ avec $B = {}^tA$:

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{\ell,k} a_{\ell,k}, \text{ d'où}$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.}$$

Toute cette partie est à savoir faire instantanément !

Partie III.

6.a) Par définition du produit matriciel,

$$\boxed{U\,{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (U\,{}^tV)_{i,j} = u_i v_j.}$$

b)

$$\boxed{\mathrm{Tr}(U\,{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \dots \text{ accessoirement } \dots = \langle U, V \rangle = {}^tUV.}$$

c) • $U\,{}^tV$ n'est pas nulle, car il existe $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $u_{i_0} \neq 0$ puisque U n'est pas nulle, et il existe $j_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $v_{j_0} \neq 0$ puisque V n'est pas nulle. Ainsi le coefficient d'indice (i_0, j_0) de $U\,{}^tV$ n'est pas nul. Donc $\mathrm{rg}(U\,{}^tV) \geqslant 1$.

• Par la formule du rang, $\dim \mathrm{Ker}(U\,{}^tV) \leqslant n - 1$.

De plus, pour tout $W \in (\mathrm{Vect}(V))^\perp$, $U\,{}^tVW = \langle V, W \rangle\, U = 0$, donc $(\mathrm{Vect}(V))^\perp \subset \mathrm{Ker}(U\,{}^tV)$.

Et comme $\dim(\mathrm{Vect}(V))^\perp = n - 1$, on a $\dim \mathrm{Ker}(U\,{}^tV) = n - 1$. Et toujours la formule du rang :

$$\boxed{\mathrm{rg}(U\,{}^tV) = 1.}$$

Ce que la première méthode de la question initiale démontrait quasiment ...

7.a) Puisque A est de rang 1, A possède au moins une colonne non nulle. Soit j_0 l'indice d'une colonne non nulle de A.

Alors toutes les autres colonnes de A sont proportionnelles à $C_{j_0}(A)$, sinon A serait au moins de rang 2.

$$\boxed{\exists j_0 \in [\![1\,;\,n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \quad \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).}$$

b) Soit $U = C_{j_0}(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V = (\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors U est non nulle par définition de j_0 et V est non nulle car $\alpha_{j_0} = 1$, puisque $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0} C_{j_0}(A)$.

On a alors : $(U\,{}^tV)_{i,j} = u_i v_j = a_{i,j_0} \alpha_j = a_{i,j}$ d'après la relation $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

$$\boxed{\exists (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2, \quad A = U\,{}^tV.}$$

8. La synthèse des deux questions précédentes montre que :

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si, et seulement si, il existe } (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2 \text{ telles que } A = U\,{}^tV.}$$

Partie IV.

9. Pour tout (i,j) de $[\![1\,;\,n]\!]^2$, $(\mathrm{U_X}\,{}^t\mathrm{U_Y})_{i,j} = \mathbb{P}(\mathrm{X}=i)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=j) = \mathbb{P}((\mathrm{X}=1)\cap(\mathrm{Y}=j)) = m_{i,j}$ par indépendance de X et Y. De plus, $\mathrm{U_X}$ et $\mathrm{U_Y}$ sont non nulles puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{U_X}=i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{U_Y}=i) = 1$. Par la caractérisation précédente,

$$\boxed{\mathrm{U_X}\,{}^t\mathrm{U_Y} = \mathrm{M} \text{ et M est de rang 1.}}$$

10.a) Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.
Comme le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $\mathrm{C}_j(\mathrm{M})$ est $\mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j))$, le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $\mathrm{C}_1(\mathrm{M})+\cdots+\mathrm{C}_n(\mathrm{M})$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^n \mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j))$. D'après la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements $([\mathrm{Y}=j])_{1\leqslant j\leqslant n}$, cette somme vaut $\mathbb{P}(\mathrm{X}=i)$, qui est bien le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $\mathrm{U_X}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathrm{C}_1(\mathrm{M})+\cdots+\mathrm{C}_n(\mathrm{M}) = \mathrm{U_X}.}$$

b) Comme M est de rang 1, ses colonnes sont toutes proportionnelles à l'une de ses colonnes non nulles. Soit $j_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_{j_0}(\mathrm{M}) \neq 0$. Il existe n coefficients réels positifs ou nuls (α_j) tels que, pour tout j de $[\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{C}_j(\mathrm{M}) = \alpha_j \mathrm{C}_{j_0}(\mathrm{M})$. Ces coefficients sont positifs ou nuls car tous les coefficients de M sont des probabilités, donc sont positifs.

La relation précédente donne alors $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right)\mathrm{C}_{j_0}(\mathrm{M}) = \mathrm{U_X}$. De plus, $\displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j \geqslant 1$ puisque $\alpha_{j_0} = 1$ et les autres coefficients sont positifs.
Posons, pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k}$.
Alors, pour tout j de $[\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{C}_j(\mathrm{M}) = \alpha_j\mathrm{C}_{j_0}(\mathrm{M}) = \dfrac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k}\mathrm{U_X} = \beta_j \mathrm{U_X}$.

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \exists \beta_j \in \mathbb{R}^+, \mathrm{C}_j(\mathrm{M}) = \beta_j \mathrm{U_X}.}$$

c) Soit $j \in [\![1\,;\,n]\!]$. $\mathrm{C}_j(\mathrm{M}) = \beta_j \mathrm{U_X}$ entraîne, en sommant tous les coefficients de chaque membre,

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = \beta_j \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}=i), \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j)) = \beta_j,$$

puisque $([\mathrm{X}=i])_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements. De plus, d'après la formule des probabilités totales avec ce système complet d'événements, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=j)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \beta_j = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=j).}$$

d) Pour tout (i,j) de $[\![1\,;\,n]\!]^2$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de la relation $\mathrm{C}_j(\mathrm{M}) = \beta_j\mathrm{U_X}$ donne exactement

$$\mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=j)\mathbb{P}(\mathrm{X}=i).$$

$$\boxed{\text{Donc les v.a.r. X et Y sont indépendantes.}}$$

Partie V.

11. Comme $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$, la formule du rang assure que $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = n-1$, ce qui prouve que

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé } \mathrm{SEP}(\mathrm{A},0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) \text{ est de dimension } n-1.}$$

On se souvient que depuis le début, $n \geqslant 2$, donc tout va bien...

12. ${}^t\mathrm{VU} = \displaystyle\sum_{i=1}^n v_i u_i$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ par III.6.a (i.e. par définition du produit matriciel).
De plus, $\mathrm{A}^2 = (\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V})(\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}) = \mathrm{U}({}^t\mathrm{VU})\,{}^t\mathrm{V} = a(\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}) = a\mathrm{A}^2$.

$$\boxed{{}^t\mathrm{VU} = (a) \text{ et } \mathrm{A}^2 = a\mathrm{A}.}$$

13. $\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-a)$ est un polynôme annulateur de A, dont les racines sont 0 et a. Si $a = 0$, l'unique racine de ce polynôme est 0, donc la seule valeur propre de A est 0 (on sait déjà que 0 est une valeur propre de A). Comme $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A},0) = n-1 < n$, A n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } a = 0, \text{ alors A n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

14. Supposons $a \neq 0$. $\mathrm{AU} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{VU} = \mathrm{U}(a) = a\mathrm{U}$, avec $\mathrm{U} \neq 0$. Donc a est effectivement une valeur propre de A. D'une part, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A},a)$ est au moins de dimension 1, d'autre part, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A},0)$ et $\mathrm{SEP}(\mathrm{A},a)$ étant en somme directe avec $\dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{A},0)) = n-1$, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A},a)$ est au plus de dimension 1. Donc $\dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{A},a)) = 1$.

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0,a\} \text{ et } \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{A},0)) + \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{A},a)) = n, \text{ donc A est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

15. 13 et 14 induisent la condition nécessaire et suffisante suivante.

$$\boxed{\text{Une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.}}$$

Partie VI.

16. Montrons que $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive grâce à la partie II.

- Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\langle \lambda A + B, C \rangle = \mathrm{Tr}({}^t(\lambda A + B)C = \mathrm{Tr}(\lambda\, {}^t AC + {}^t BC) = \lambda \mathrm{Tr}({}^t AC) + \mathrm{Tr}({}^t BC) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$.
$\langle B, A \rangle = \mathrm{Tr}({}^t BA) = \mathrm{Tr}({}^t({}^t BA)) = \mathrm{Tr}({}^t AB) = \langle A, B \rangle$.
Donc $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$ donc $\langle A, A \rangle \geqslant 0$, et, puisque $\langle A, A \rangle$ est une somme de termes tous positifs, elle ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc $\langle A, A \rangle = 0$ entraîne $A = O$.
Donc $\langle .,. \rangle$ est définie positive.

$$\boxed{\langle .,. \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t MN) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

On peut espérer que tout le monde aura reconnu le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale.

17. ${}^t S = {}^t(V\,{}^t V) = V\,{}^t V = S$ donc S est symétrique.
$S^2 = (V\,{}^t V)(V\,{}^t V) = V({}^t VV)\,{}^t V = V\,{}^t V = S$ car ${}^t VV = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$.

$$\boxed{\text{S est symétrique et vérifie } S^2 = S.}$$

18.a)
- Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\Phi(M) = SM$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus : $\Phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda\Phi(M) + \Phi(N)$.
- Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque S est symétrique, on a :
$$\langle \Phi(M), N \rangle = {}^t(SM)N = {}^t M\,{}^t SN = {}^t M(SN) = \langle M, \Phi(N) \rangle.$$

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\Phi^2(M) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$.

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi, \text{ donc } \Phi \text{ est un projecteur.}}$$

Comme $\Phi(I_n) = S$, Φ n'est pas l'endomorphisme nul et n'est pas l'identité. En effet, $\mathrm{rg}(S) = 1$ donc S n'est ni nulle ni égale à I_n.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}.}$$

c) Comme $\mathrm{Ker}\Phi = \mathrm{SEP}\,(\Phi, 0)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e) = \mathrm{SEP}\,(\Phi, 1) = \mathrm{Im}\Phi$, on a :
- $\mathrm{Ker}\Phi$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires car Φ est un projecteur ;
- $\mathrm{Ker}\Phi$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e)$ sont orthogonaux car les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont orthogonaux.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\Phi \text{ et } \mathrm{Ker}(\Phi - e) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$