Partie I.

1. *Exemple 1.*

a) $J^2 = 3J$.

On en déduit que $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de J . Comme $Sp(J)$ est inclus dans l'ensemble des racines de $X^2 - 3X$, on en déduit que les valeurs propres possibles de J sont 0 et 3.

Or $J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls, donc 0 et 3 sont valeurs propres de J .

Conclusion : $Sp(J) = \{0, 3\}$.

b) $A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I$, donc $A - \lambda I = \frac{1}{2}J - (\frac{1}{2} + \lambda)I = \frac{1}{2}(J - (1 + 2\lambda)I)$.

$[\lambda \text{ est valeur propre de } A] \Leftrightarrow [A - \lambda I \text{ non inversible}] \Leftrightarrow [1 + 2\lambda \text{ est valeur propre de } J] \Leftrightarrow [2\lambda + 1 = 0 \text{ ou } 2\lambda + 1 = 3]$

Donc $Sp(A) = \{-\frac{1}{2}, 1\}$ et $\rho(A) = 1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J^k = 3^{k-1}J$ et on a $J^0 = I$. (*)

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2^n} (J - I)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \quad [\text{Newton car } J \text{ et } -I \text{ commutent}] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[(-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} J \right] \quad [\text{d'après (*)}] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[(-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k J - (-1)^n J \right) \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[(-1)^n I + \frac{1}{3} [(-1 + 3)^n - (-1)^n] J \right] \end{aligned}$$

Donc, par Newton,

$$A^n = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) J \right].$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $\beta_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

On en déduit que, $\forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \sum_{j=1}^3 |a_{k,j}(n)| = |\alpha_n| + 2|\beta_n| = \left[\left| \frac{1}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right| + 2 \left| \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right| \right]$

Or $\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \frac{1}{2}$ car $n \geq 1$, donc $1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$ et $1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$,

donc $\forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \sum_{j=1}^3 |a_{k,j}(n)| = \left[\frac{1}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right] = 1$

Donc $N(A^n) = 1$.

d) Or $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{1}{3}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \frac{1}{3}J$. Donc $M = \frac{1}{3}J$, et $rg(M) = rg(J) = 1$.

De plus, $M^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{9}3J = M$ donc M est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. a) A est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, donc $Sp(A) = \{1, 1+i, 1-i\}$.

A admet 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc A est diagonalisable.

$|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, donc $N(A) = \max(1, 1+|1+i|, |1-i|)$,

donc $N(A) = 1 + \sqrt{2}$ et $\rho(A) = \sqrt{2}$.

b) Dans toute la suite, on notera, pour λ valeur propre de A , $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$ le sous-espace propre associé à λ .

On pose $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $AC_1 = C_1$ avec $C_1 \neq 0$ et $AC_2 = (1+i)C_2$ avec $C_2 \neq 0$,

donc C_1 est un vecteur propre associé à 1 et C_2 est un vecteur propre associé à $1+i$.

Or A admet 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

Donc $E_1(A) = Vect(C_1)$ et $E_{1+i}(A) = Vect(C_2)$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-i)x \\ (1+i)y + z = (1-i)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2iy \end{cases}$.

Donc $E_{1-i}(A) = Vect(C_3)$ où $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

Comme A est diagonalisable, on a $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus E_{1+i}(A) \oplus E_{1-i}(A)$. $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ est obtenue en juxtaposant une base de chacun des sous-espaces propres, d'où $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A .

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{C}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$.

Le théorème de changement de bases donne $A = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(1, 1+i, 1-i)$.

P est une matrice de passage, donc P est inversible. Par Gauss, on transforme simultanément P et I , en effectuant à la première étape l'opération $L_2 \leftarrow 2iL_2 + L_3$, et à la deuxième étape $L_2 \leftarrow \frac{1}{2i}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2i}L_3$. Par ces opérations,

P est transformée en I et I est transformée en P^{-1} . On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$.

Enfin, on pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_k$: " $A^k = PD^kP^{-1}$ ".

On a déjà vu que le rang 1 était vérifié.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ vraie. Alors $A^{k+1} = A^k A \underbrace{=}_{\text{par } \mathcal{H}_k} PD^kP^{-1}A \underbrace{=}_{\text{par } \mathcal{H}_1} PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vérifiée.

Donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$.

Après calculs, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & \frac{1}{2i} [(1+i)^n - (1-i)^n] \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^n) = \max(1, |1+i|^n, |1-i|^n) = (\sqrt{2})^n$ et $[\rho(A)]^n = (\sqrt{2})^n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \rho(A^n) = [\rho(A)]^n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N(A^n) = \max\left(1, |1+i|^n + \frac{1}{|2i|} |(1+i)^n - (1-i)^n|, |1-i|^n\right)$.

$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $(1+i)^n - (1-i)^n = (\sqrt{2})^n [e^{i\frac{n\pi}{4}} - e^{-i\frac{n\pi}{4}}] = (\sqrt{2})^n \times 2i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, donc $N(A^n) = \max\left(1, (\sqrt{2})^n [1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|], (\sqrt{2})^n\right)$

Donc $N(A^n) = 2^{\frac{n}{2}} [1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|]$.

On en déduit que $[N(A^n)]^{1/n} = \sqrt{2} [1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|]^{1/n} = \sqrt{2} \exp\left[\frac{1}{n} \ln(1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|)\right]$.

On pose $\gamma_n = \ln(1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \gamma_n \leq \ln 2$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(1 + |\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} [N(A^n)]^{1/n} = \sqrt{2}$, par continuité de l'exponentielle en 0.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} [N(A^n)]^{1/n} = \rho(A)$.

Partie II.

3. $AX = \lambda X$, donc, $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j = \lambda x_k$.

Pour $k = k_0$, on obtient alors : $\sum_{j=1}^p a_{k_0,j} x_j = \lambda x_{k_0}$. Donc, par l'inégalité triangulaire, $|\lambda| |x_{k_0}| \leq \sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| |x_j|$.

Or $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_{k_0}|$, donc puisque les $|a_{k_0,j}|$ sont positifs, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|a_{k_0,j}| |x_j| \leq |a_{k_0,j}| |x_{k_0}|$,

et en sommant, $\sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| |x_j| \leq \left[\sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| \right] |x_{k_0}|$.

Donc, $|\lambda| |x_{k_0}| \leq \left[\sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| \right] |x_{k_0}|$ et comme $|x_{k_0}| > 0$, $|\lambda| \leq \left[\sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| \right] \leq \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{k,j}| = N(A)$.

On a donc clairement $0 \leq \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| \leq N(A)$, et $0 \leq \rho(A) \leq N(A)$.

4. a) On prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n X = \lambda^n X$.

Comme X est non nul (c'est un vecteur propre de A), on a bien λ^n est une valeur propre de A^n .

Pour toute valeur propre λ de A , on a donc $|\lambda^n| \leq \rho(A^n)$, ou encore $|\lambda|^n \leq \rho(A^n)$. C'est encore vrai pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$,

donc $\rho(A)^n \leq \rho(A^n)$.

b) On suppose de plus dans cette question que $\mu \neq 0$. On pose $P(X) = X^n - \mu$.

Soit $x \in \mathbb{C}$. $[x \text{ est racine de } P] \Leftrightarrow [x^n = \mu] \Leftrightarrow [\exists i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x = \alpha_i]$

Or les $\alpha_i, 0 \leq i \leq n-1$ sont deux à deux distincts, P est unitaire et $\deg(P) = n$, donc on a trouvé toutes les racines de P et elles sont simples.

Donc $P(X) = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha_j)$.

Donc $P(A) = \prod_{j=0}^{n-1} (A - \alpha_j I_p)$, c'est-à-dire $A^n - \mu I_p = \prod_{j=0}^{n-1} (A - \alpha_j I_p)$.

c) Supposons que $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, α_j ne soit pas valeur propre de A .

Alors $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $A - \alpha_j I_p$ est inversible, donc $\prod_{j=0}^{n-1} (A - \alpha_j I_p)$ est inversible, donc $A^n - \mu I_p$ est inversible, et on aboutit à une contradiction, puisque μ est une valeur propre de A^n .

Donc, $\boxed{\exists j_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \alpha_{j_0} \text{ est une valeur propre de } A}$.

d) $|\alpha_{j_0}| \leq \rho(A)$ par définition. Or $\mu = \alpha_{j_0}^n$, donc $|\alpha_{j_0}|^n = |\mu|$, donc $|\alpha_{j_0}| = |\mu|^{1/n} = (\rho(A^n))^{1/n}$, donc $(\rho(A^n))^{1/n} \leq \rho(A)$.

La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit $\rho(A^n) \leq (\rho(A))^n$. On déduit de 4.a) que $\boxed{\rho(A^n) = (\rho(A))^n}$.

On a vu à la question 3. que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $0 \leq \rho(A) \leq N(A)$, donc en appliquant ce résultat à A^n , on a :

$0 \leq \rho(A^n) \leq N(A^n)$. Comme $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $0 \leq (\rho(A^n))^{1/n} \leq (N(A^n))^{1/n}$,

donc $\boxed{0 \leq \rho(A) \leq (N(A^n))^{1/n}}$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq N(A^n) = \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)| \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)|.$$

Or $\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{k,j}(n)| = 0$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$, donc puisque le nombre de termes de la somme ne dépend pas de n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)| = 0$.

En utilisant le théorème d'encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} N(A^n) = 0}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq (\rho(A))^n \leq N(A^n)$ par la question 4.d), donc à nouveau par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(A)^n = 0$.

Avec les résultats sur les suites géométriques, on en déduit que $|\rho(A)| < 1$. Comme $\rho(A) \geq 0$, on a donc $\boxed{\rho(A) < 1}$.

6. a) On suppose dans cette question que $\rho(A) < 1$.

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, donc $\exists P \in GL_p(\mathbb{C})$, $A = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$, et $D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n)$.

Or, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |\lambda_j|^n \leq \rho(A)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(A)^n = 0$ car $0 \leq \rho(A) < 1$. Donc par encadrement, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_j|^n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = 0$, et avec les propriétés de l'énoncé sur la limite d'un produit de matrices, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0}$.

b) Avec les mêmes notations qu'au a), on a $A_\varepsilon = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} D = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\rho(A)+\varepsilon}, \frac{\lambda_2}{\rho(A)+\varepsilon}, \dots, \frac{\lambda_p}{\rho(A)+\varepsilon}\right)$.

Les valeurs propres de A_ε sont les $\frac{\lambda_j}{\rho(A)+\varepsilon}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc $\rho(A_\varepsilon) = \max_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} \frac{|\lambda_j|}{\rho(A)+\varepsilon} = \frac{\max_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} |\lambda_j|}{\rho(A)+\varepsilon} = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$ car $\varepsilon > 0$.

Donc $\boxed{\rho(A_\varepsilon) < 1}$.

D'après 6.a), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_\varepsilon)^n = 0$, puis d'après la question 5. que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} N(A_\varepsilon^n) = 0}$.

Par définition de la limite, on a $\forall \alpha > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $|N(A_\varepsilon^n)| \leq \alpha$.

En prenant $\alpha = 1$, on a bien $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, N(A_\varepsilon^n) \leq 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $A = (\rho(A) + \varepsilon) A_\varepsilon$, donc $A^n = (\rho(A) + \varepsilon)^n A_\varepsilon^n$.

On pose alors, pour $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $A^n = (a_{k,j}(n))_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $A_\varepsilon^n = (b_{k,j}(n))_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On a pour $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $a_{k,j}(n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n b_{k,j}(n)$.

Donc, pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)| = (\rho(A) + \varepsilon)^n \sum_{j=1}^p |b_{k,j}(n)|$ car $\rho(A) + \varepsilon > 0$, donc $\boxed{N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)}$.

d) Avec 6.b) et 6.c), $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^n$ car $N(A_\varepsilon^n) \leq 1$.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $(N(A^n))^{1/n} \leq (\rho(A) + \varepsilon)$ car la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme, par la question 4.d), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \geq 0$, on en déduit :

$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 0 \leq (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon}$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left| (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \right| \leq \varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la définition de la limite donne : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)}$.

Partie III.

7. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{H}_n : \forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, 0 \leq b_{k,j}(n) \leq a_{k,j}(n)$.

$\mathcal{H}_1$ est vérifiée par hypothèse;

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

Alors pour $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $b_{k,j}(n+1) = \sum_{l=1}^p b_{k,l}(n) b_{l,j}$.

Or, pour $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, pour $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $0 \leq b_{k,l}(n) \leq a_{k,l}(n)$ (par $\mathcal{H}_n$) et $0 \leq b_{l,j} \leq a_{l,j}$ (par hypothèse).

En multipliant membre à membre des inégalités positives,

on a $\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \forall l \in \llbracket 1, p \rrbracket, 0 \leq b_{k,l}(n) b_{l,j} \leq a_{k,l}(n) a_{l,j}$,

et, en sommant, $\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, 0 \leq b_{k,j}(n+1) \leq \sum_{l=1}^p a_{k,l}(n) a_{l,j} = a_{k,j}(n+1)$, et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, 0 \leq b_{k,j}(n) \leq a_{k,j}(n)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p |b_{k,j}(n)| = \sum_{j=1}^p b_{k,j}(n) \leq \sum_{j=1}^p a_{k,j}(n) = \sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)|$,

donc $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p |b_{k,j}(n)| \leq \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \sum_{j=1}^p |a_{k,j}(n)| \leq N(A^n)$, donc $\max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \sum_{j=1}^p |b_{k,j}(n)| \leq N(A^n)$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, N(B^n) \leq N(A^n)}$.

Toujours par la croissance sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto x^{1/n}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, (N(B^n))^{1/n} \leq (N(A^n))^{1/n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (N(B^n))^{1/n} = \rho(B)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$, on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente

et on a $\boxed{\rho(B) \leq \rho(A)}$.

8. On a donc $N(A) = s$, puisque les coefficients de A sont positifs.

De plus, en notant $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AZ = sZ$ et $Z \neq 0$, donc s valeur propre de A .

Donc $s = |s| \leq \rho(A) \underset{\text{par 3.}}{\leq} N(A) = s$, donc $\boxed{\rho(A) = s}$.

9. On sait déjà que $\rho(A) \leq N(A)$.

Si $\sigma = 0$, l'inégalité est claire. On suppose maintenant $\sigma > 0$, et on pose, pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sigma_k = \sum_{j=1}^p a_{k,j}$.

On a donc $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sigma \leq \sigma_k$.

Posons alors $B = (b_{k,j})_{1 \leq k, j \leq p}$ avec pour $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $b_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k} a_{k,j}$. On a $\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $0 \leq b_{k,j} \leq a_{k,j}$.

Par la question 7., on en déduit que $\rho(B) \leq \rho(A)$.

Or B est une matrice positive non nulle qui vérifie $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p b_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j} = \sigma$, donc par la question 8., $\rho(B) = \sigma$.

Donc $\boxed{\sigma \leq \rho(A) \leq N(A)}$.

10. a) Δ_X est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $x_k, 1 \leq k \leq p$, sont strictement positifs, donc non nuls, donc $\boxed{\Delta_X \text{ est inversible}}$.

$$A\Delta_X = (a_{k,j}x_j)_{1 \leq k, j \leq p} \text{ et } \boxed{\Delta_X^{-1}A\Delta_X = \left(a_{k,j} \frac{x_j}{x_k}\right)_{1 \leq k, j \leq p}}$$

b) $\Delta_X^{-1}A\Delta_X$ est une matrice positive et non nulle d'après l'expression de la question 10.a)

et d'après la question 9., $\min_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p \left| a_{k,j} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \rho(\Delta_X^{-1}A\Delta_X) \leq \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p \left| a_{k,j} \frac{x_j}{x_k} \right|$.

A et $\Delta_X^{-1}A\Delta_X$ sont semblables, donc ont même valeurs propres donc $\rho(A) = \rho(\Delta_X^{-1}A\Delta_X)$.

Comme A est une matrice positive et $X > 0$, on en déduit : $\boxed{\min_{1 \leq k \leq p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq k \leq p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j}$.

c) Supposons qu'il existe $\beta \geq 0$ tel que $\beta X < AX$.

Par définition, on a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\beta x_k < \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j$, donc pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\beta < \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j$.

D'où $\beta < \min_{1 \leq k \leq p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j$, donc $\boxed{\beta < \rho(A)}$.

Partie IV.

11. a) $A > 0$ donc A est une matrice positive non nulle, et par la question 9., $\rho(A) \geq \sigma = \min_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p a_{k,j}$.

Comme $\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $a_{k,j} > 0$, on a $\sigma > 0$, donc $\boxed{\rho(A) > 0}$.

$$b) |AX| = \left(\sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j \right)_{1 \leq k \leq p} \text{ et } A|X| = \left(\sum_{j=1}^p a_{k,j}|x_j| \right)_{1 \leq k \leq p}.$$

Or, $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\left| \sum_{j=1}^p a_{k,j}x_j \right| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \sum_{j=1}^p \underbrace{a_{k,j}}_{\leq} |x_j| \leq \sum_{j=1}^p \underbrace{a_{k,j}}_{\leq} |x_j|$, donc $\boxed{|AX| \leq A|X|}$.

De plus, X est un vecteur propre associé à λ , donc $|AX| = |\lambda X| = (|\lambda x_k|)_{1 \leq k \leq p} = |\lambda| (|x_k|)_{1 \leq k \leq p} = |\lambda| |X| = \rho(A) |X|$.

Donc $\boxed{\rho(A) |X| \leq A|X|}$.

c) $Z = \left(\sum_{j=1}^p a_{k,j}|x_j| \right)_{1 \leq k \leq p}$. X est un vecteur propre donc est non nul,

donc $\exists j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_{j_0} \neq 0$, donc $\exists j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|x_{j_0}| > 0$

Or $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p a_{k,j} |x_j| = \underbrace{a_{k,j_0} |x_{j_0}|}_{>0} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^p a_{k,j} |x_j|}_{\geq 0}$ car les coefficients de A sont strictement positifs.

Donc $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{j=1}^p a_{k,j} |x_j| > 0$ et $\boxed{Z > 0}$.

d) Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$. $Y \neq 0$ par hypothèse et $Y \geq 0$, donc $\exists j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_{j_0} > 0$.

Avec la même démonstration qu'à la question précédente, en remplaçant x_j par y_j , on trouve de même que : $\boxed{AY > 0}$.

Donc, en remplaçant Y par sa valeur, $A(A|X| - \rho(A)|X|) > 0$, donc $AZ - \rho(A)Z > 0$, donc $\boxed{\rho(A)Z < AZ}$.

e) $Z \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $Z > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$ donc, avec la question 10.c), $\rho(A) < \rho(A)$.

On aboutit donc à une contradiction en supposant $Y \neq 0$, donc $Y = 0$ et $A|X| = \rho(A)|X|$.

Comme $|X| \neq 0$, on a bien $\boxed{\rho(A) \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } |X| \text{ est un vecteur propre associé}}$.

12. a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2) \underbrace{\overline{(z_1 + z_2)}}_{\overline{z_1 + z_2}} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|$

donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \underbrace{z_1 \overline{z_1}}_{|z_1|^2} + \underbrace{z_2 \overline{z_1}}_{\overline{z_1 z_2}} + \underbrace{z_1 \overline{z_2}}_{z_1 \overline{z_2}} + \underbrace{z_2 \overline{z_2}}_{|z_2|^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1 z_2|$

Or $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ et $\overline{z_2} = |z_2| e^{-i\theta_2}$, avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[$, donc $z_1 \overline{z_2} = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \underbrace{\cos(\theta_1 - \theta_2)}_{\text{car } z_1 z_2 \neq 0} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \Leftrightarrow \underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\theta_1 - \theta_2 \in]-2\pi, 2\pi[} = 0$.

Conclusion : $\boxed{\theta_1 = \theta_2}$.

b) On pose, pour $p \geq 2$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_p$:

"si $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont p complexes tous non nuls tq $\left| \sum_{j=1}^p z_j \right| = \sum_{j=1}^p |z_j|$, alors $\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, z_j = |z_j| e^{i\theta}$ "

$\mathcal{H}_2$ est vraie d'après la question a).

Soit $p \geq 2$. On suppose $\mathcal{H}_p$ vraie.

On considère $p + 1$ complexes tous non nuls $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$ vérifiant $\left| \sum_{j=1}^{p+1} z_j \right| = \sum_{j=1}^{p+1} |z_j|$.

On a $\sum_{j=1}^{p+1} |z_j| = \left| \sum_{j=1}^{p+1} z_j \right| = \left| \underbrace{\sum_{j=1}^p z_j}_{\text{noté } u} + z_{p+1} \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{j=1}^p z_j \right|}_{|u|} + |z_{p+1}| \leq \sum_{j=1}^p |z_j| + |z_{p+1}| \leq \sum_{j=1}^{p+1} |z_j|$.

Il y a donc égalité partout, et en particulier, $\left| \sum_{j=1}^p z_j \right| = \sum_{j=1}^p |z_j|$ (*) et $|u + z_{p+1}| = |u| + |z_{p+1}|$ (**).

En utilisant $\mathcal{H}_p$ pour (*), on a $\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, z_j = |z_j| e^{i\theta}$.

Or $u \neq 0$ car $|u| = \sum_{j=1}^p |z_j| > 0$ par hypothèse et $z_{p+1} \neq 0$,

donc en exploitant a) pour (**), on a $\exists \alpha \in [0, 2\pi[, u = |u| e^{i\alpha}$ et $z_{p+1} = |z_{p+1}| e^{i\alpha}$.

$$\text{Donc } u = |u| e^{i\alpha} = \left| \sum_{j=1}^p z_j \right| e^{i\alpha} \underset{\text{par } (*)}{=} \left(\sum_{j=1}^p |z_j| \right) e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^p |z_j| e^{i\alpha} \text{ et } u = \sum_{j=1}^p z_j = \sum_{j=1}^p |z_j| e^{i\theta}.$$

Comme $\sum_{j=1}^p |z_j| > 0$, on a $e^{i\alpha} = e^{i\theta}$, avec $\alpha - \theta \in]-2\pi, 2\pi[$, donc $\alpha = \theta$.

Donc $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $\forall j \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, $z_j = |z_j| e^{i\theta}$ et $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

Conclusion, on a montré par récurrence que

$$\text{si } z_1, z_2, \dots, z_p \text{ sont } p \text{ complexes tous non nuls vérifiant } \left| \sum_{j=1}^p z_j \right| = \sum_{j=1}^p |z_j|, \text{ alors } \exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, z_j = |z_j| e^{i\theta}.$$

13. $A|X| > 0$ par la question 11.e). Or d'après 11.e), $A|X| = \rho(A)|X|$, donc $\rho(A)|X| > 0$. Comme $\rho(A) > 0$ (d'après 11.a)), on a $|X| > 0$.

De plus $|AX| = |\lambda X| = |\lambda| |X| = \rho(A) |X| = A|X|$. Donc $|AX| = A|X|$.

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^p a_{k,j} |x_j|, \text{ donc } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^p |a_{k,j} x_j| \text{ car } A > 0$$

Or pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_{k,j} x_j \neq 0$, donc avec la question précédente, pour $k = 1$,

$$\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{1,j} x_j = |a_{1,j} x_j| e^{i\theta}.$$

Comme $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_{1,j} > 0$, on a $\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_j = |x_j| e^{i\theta}$.

Donc $\exists \theta \in [0, 2\pi[, X = e^{i\theta} |X|$.

14. a) D'après la question 11., $\rho(A)$ est une valeur propre de A de module maximal (*).

$$\text{Or } AX = A[e^{i\theta} |X|] = e^{i\theta} A|X| \underset{\text{question 11}}{=} e^{i\theta} \rho(A) |X| = \rho(A) X$$

et $AX = \lambda X$ puisque X vecteur propre de A associé à λ .

Donc $\lambda X = \rho(A) X$, et comme X est un vecteur propre donc est non nul, on a $\lambda = \rho(A)$ (**).

(*) et (**) donnent $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

b) Notons F le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

$U \in F$ et $V \in F$ par hypothèse, donc $u_1 V - v_1 U \in F$.

Si on suppose $u_1 V - v_1 U \neq 0$, on a $u_1 V - v_1 U$ vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$, donc $|u_1 V - v_1 U| > 0$.

D'où toutes les composantes de $u_1 V - v_1 U$ sont non nulles. On a donc une contradiction, puisque la première composante de $u_1 V - v_1 U$ est clairement nulle;

Donc $u_1 V - v_1 U = 0$. Or, $|U| > 0$ et $|V| > 0$, donc $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$, ce qui donne une contradiction avec U et V linéairement indépendants.

Donc (U, V) est liée.

En particulier, U étant un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$,

on a, pour tout vecteur propre V de A associé à la valeur propre $\rho(A)$, $V \in Vect(U)$.

Donc $F \subset Vect(U)$, et comme $\dim F \geq 1$, on a $F = Vect(U)$.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ est donc de dimension 1.

15. a) La linéarité de la transposition donne, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, ${}^t(A - \lambda I_p) = {}^t A - \lambda {}^t I_p = {}^t A - \lambda I_p$.

$$[\lambda \text{ est valeur propre de } A] \Leftrightarrow [A - \lambda I_p \text{ n'est pas inversible}] \Leftrightarrow [{}^t(A - \lambda I_p) \text{ n'est pas inversible}]$$

$$\Leftrightarrow [{}^t A - \lambda I_p \text{ n'est pas inversible}]$$

donc $[\lambda \text{ est valeur propre de } A] \Leftrightarrow [\lambda \text{ est valeur propre de } {}^tA]$

Donc A et tA ont les mêmes valeurs propres.

b) D'après la question 14.a), $\rho(A)$ est valeur propre de A , donc $\rho(A)$ est valeur propre de tA .

$\rho(A)$ est une valeur propre réelle (strictement positive), donc on va considérer que Z est un vecteur propre à coefficients réels pour continuer la question; (Remarque : ce vecteur Z n'a rien à voir avec celui de la question 11.)

Les valeurs propres de tA sont celles de A , donc $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

tA est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, strictement positive, car A l'est, Z est vecteur propre de tA associé à la valeur propre $\rho(A) = \rho({}^tA)$, on peut donc appliquer les résultats trouvés dans les questions précédentes à tA . D'où, d'après la question 11., $|Z|$ est aussi un vecteur propre de tA associé à la valeur propre $\rho(A)$, et $|Z| > 0$.

De plus le sous-espace propre de tA associé à $\rho(A)$ est de dimension 1, (question 14.b)), donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $Z = \alpha |Z|$.

On a $\alpha \neq 0$ car $Z \neq 0$, et les composantes de $|Z|$ sont toutes strictement positives,

donc les coordonnées de Z sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

c) On note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$. On suppose par exemple que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $z_k < 0$.

$U > 0$, donc $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k > 0$.

$\rightarrow {}^tZU = \sum_{k=1}^p z_k u_k < 0$, donc Y est bien défini. On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

$\rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_k = \frac{1}{{}^tZU} z_k > 0$, donc $Y > 0$.

$\rightarrow {}^tAY = \frac{1}{{}^tZU} {}^tAZ = \frac{1}{{}^tZU} \rho(A) Z$, donc ${}^tAY = \rho(A) Y$.

$\rightarrow {}^tYU = \frac{1}{{}^tZU} {}^tZU = 1$.

16. a) $M^2 = (U^tY)(U^tY) = U \underbrace{{}^tYU}_{\text{réel}} {}^tY = \underbrace{{}^tYU}_{=1} \times \underbrace{U^tY}_{=M} = M$, donc $M^2 = M$ et M est la matrice d'un projecteur. On note q ce projecteur.

Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $MV = 0 \Leftrightarrow (U^tY)V = 0 \Leftrightarrow U \underbrace{({}^tYV)}_{\text{réel}} = 0 \Leftrightarrow ({}^tYV)U = 0 \Leftrightarrow {}^tYV = 0 \Leftrightarrow V \in (\text{Vect}(Y))^\perp$.
car $U \neq 0$

Donc $\ker q = (\text{Vect}(Y))^\perp$.

$MU = U \underbrace{{}^tYU}_{\text{réel}} = ({}^tYU)U$, donc $U \in \text{Im } q$, donc $\text{Vect}(U) \subset \text{Im } q$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } q) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\ker q) = p - (p-1) = 1$, donc $\dim(\text{Vect}(U)) = \dim(\text{Im } q)$.

D'où $\text{Im } q = \text{Vect}(U)$.

b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n : \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M^n$.

Le rang 1 est clairement vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n \times \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right) \stackrel{\text{par } \mathcal{H}_n}{=} \left(\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M\right) \times \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right).$$

Donc $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{\rho(A)}MA - \frac{1}{\rho(A)^n}A^nM + M^2$.

Or $MA = (U^tY)A = U \times {}^t(tAY) = U \times {}^t(\rho(A)Y) = \rho(A)U^tY = \rho(A)M$,

$A^nM = A^n \times (U^tY) = (A^nU)^tY = \rho(A)^nU^tY$, (car U vecteur propre associé à $\rho(A)$), donc $A^nM = \rho(A)^nM$,
et $M^2 = M$.

Donc $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - M - M + M = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - M$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$.

17. a) Par définition, $(A - \rho(A)M)W = \mu W$, donc puisque $\mu \neq 0$, $W = \frac{1}{\mu}(A - \rho(A)M)W$.

Donc $MW = \frac{1}{\mu} \left(\underbrace{MA}_{=\rho(A)M} - \rho(A) \underbrace{M^2}_{=M} \right) = 0$, donc $MW = 0$.

Donc, puisque $(A - \rho(A)M)W = \mu W$, on a $AW - \rho(A)MW = \mu W$, donc $AW = \mu W$.

$AW = \mu W$ et $W \neq 0$ car W est un vecteur propre de $(A - \rho(A)M)$, donc μ est valeur propre de A ,

et par définition, $|\mu| \leq \rho(A)$.

b) Supposons que $|\mu| = \rho(A)$. Alors, d'après la question 14.a), $\mu = \rho(A)$, puisque $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal.

Et, d'après la question 14.b), le sous-espace propre de A associé à $\rho(A)$ est de dimension 1. U étant un vecteur propre, on a : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, W = \alpha U$.

Or $MW = 0$, donc $\alpha MU = 0$. Comme d'après 16.a), $MU = U$, on a $\alpha U = 0$, donc $\alpha = 0$ puisque U non nul comme vecteur propre.

Donc $W = 0$, et on a une contradiction avec le fait que W est un vecteur propre.

D'où $|\mu| < \rho(A)$.

c) Pour toute valeur propre μ non nulle de $A - \rho(A)M$, on a $|\mu| < \rho(A)$, et le résultat reste vrai si 0 est valeur propre.

Donc $\max_{\mu \in Sp(A - \rho(A)M)} |\mu| < \rho(A)$, donc $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$.

Or $\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right) = \rho\left[\frac{1}{\rho(A)}(A - \rho(A)M)\right] = \frac{\rho(A - \rho(A)M)}{\rho(A)} < 1$.

Donc, d'après le résultat admis en fin de partie II, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = 0$.

Et, en utilisant la question 16.b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M$.

Partie V.

18. a) $V_0 = \sum_{k=1}^p s_k e_k$, et comme $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée, on a $s_1 = \langle V_0, e_1 \rangle = {}^tV_0 e_1$.

On note $V_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$. On a alors : $s_1 = \sum_{j=1}^p \gamma_j \beta_j$.

Or $A > 0$, donc $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal, et le sous-espace propre associé est de dimension 1. (cf partie IV)

Ici, on a donc $\rho(A) = \lambda_1$ et $E_{\lambda_1}(A) = \text{Vect}(e_1)$. De plus, toujours avec la partie IV, $|e_1| > 0$ et $|e_1|$ est aussi vecteur propre de A associé à λ_1 .

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $e_1 = \alpha |e_1|$, et $\alpha \neq 0$, car e_1 vecteur propre.

Donc $s_1 = \sum_{j=1}^p \gamma_j \alpha |\beta_j| = \underbrace{\alpha}_{\neq 0} \sum_{j=1}^p \gamma_j |\beta_j|$. Or $V_0 > 0$ et $|e_1| > 0$, donc $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\gamma_j > 0$ et $\beta_j > 0$. Donc $\boxed{s_1 \neq 0}$.

b) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, e_k est vecteur propre de A^n associé à λ_k^n .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0 = A^n \sum_{k=1}^p s_k e_k = \sum_{k=1}^p s_k A^n e_k = \sum_{k=1}^p s_k \lambda_k^n e_k$.

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée,

donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\|V_n\|^2 = \sum_{k=1}^p (s_k \lambda_k^n)^2 = \sum_{k=1}^p s_k^2 (\lambda_k^n)^2 = \lambda_1^{2n} \sum_{k=1}^p s_k^2 \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n} = \lambda_1^{2n} \left[s_1^2 + \sum_{k=2}^p s_k^2 \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n} \right]$.

Or pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1$, donc pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^{2(n+1)} = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|V_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = s_1^2, \text{ puis } \|V_n\|^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} s_1^2 \lambda_1^{2n} \quad (\text{car } s_1 \neq 0)$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s_1^2 \lambda_1^{2n+2}}{s_1^2 \lambda_1^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_1^2$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = |\lambda_1|$. Comme $\lambda_1 = \rho(A) > 0$, on en déduit : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} e_1 = \left(\frac{s_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} \right) e_1 + \sum_{k=2}^p \frac{s_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} e_k.$$

Donc

$$\left\| \frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} e_1 \right\|^2 = \left(\frac{s_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} \right)^2 + \sum_{k=2}^p \frac{s_k^2 \lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2}.$$

Or pour $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\frac{s_k^2 \lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s_k^2}{s_1^2} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n}$ et $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1$, donc pour $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_k^2 \lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_k^2}{s_1^2} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n} = 0$.

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|V_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = s_1^2$ donc, puisque $\lambda_1 > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|V_n\|}{\lambda_1^n} = |s_1|$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|}$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} e_1 \right\|^2 = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|} e_1 = \begin{cases} e_1 & \text{si } s_1 > 0 \\ -e_1 & \text{si } s_1 < 0 \end{cases}}$.

19. a) Procédure Puissance(A : matrice; n : integer; V_0 : vecteur; var V : vecteur);

```

var  $k$  : integer;  $T$  : vecteur;
begin affecte( $V_0$ ,  $V$ );
  for  $k := 1$  to  $n$  do begin prodmatrice( $A$ ,  $V$ ,  $T$ );
    affecte( $T$ ,  $V$ );
  end;
end;
```

b) e_1 et $-e_1$ étant des vecteurs propres, peu importe le signe de s_1 .

On choisira donc de prendre comme valeur approchée de λ_1 le réel $\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|}$ pour n suffisamment grand, et comme vecteur propre associé $\frac{V_n}{\|V_n\|}$, toujours pour n suffisamment grand.

Procédure vectpropre(A ; matrice; n : integer; V_0 : vecteur; var V : vecteur);

```

var  $k$  : integer;  $a$  : real;
begin Puissance( $A$ ,  $n$ ,  $V_0$ ,  $V$ );
   $a := norme(V)$ ;
  for  $k := 1$  to  $p$  do  $V[k] := V[k] / a$ ;
end;
```

Procédure valpropre(A ; matrice; n : integer; V_0 : vecteur) : real;

```

var  $V$ ,  $W$  : vecteur;  $k$  : integer;
Begin for  $k := 1$  to  $n$  do begin affecte( $V_0$ ,  $V$ );
  prodmat( $A$ ,  $V_0$ ,  $W$ );
  affecte( $W$ ,  $V_0$ );
end;
valpropre :=  $norme(V_0) / norme(V)$ ;
end;
```